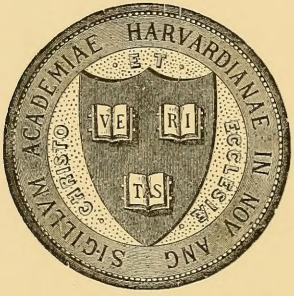
SOC
7130

HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167

Exchange

October 9, 1908.

OCT 9 1908

167

16

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide

TOME SEIZIÈME.

LIÉGE,
CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUARDT.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS,
CHEZ RORET, LIBre.
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*.

1861.

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ

AU 30 JUIN 1861.

Nota. Les noms des Membres Fondateurs sont précédés d'un astérisque.

Bureau.

Président,	MM.	Frédéricx.
Vice-Président,		Schaar.
Secrétaire-Général,		Lacordaire,
Trésorier,		Spring.

Membres effectifs.

MM.

1835. *Delvaux, Professeur émérite à l'Université.
*Brasseur, Professeur à l'Université.
*Gloesener, id.
*Frédéricx, Général-Major honoraire, à Liége.
1842. Lacordaire, Professeur à l'Université.
Noel, id.
Spring, id.
De Koninck, id.
Chandelon, id.
De Sélys-Longchamps, Edm. (Baron de), Sénateur.
Neuens, Lieutenant Colonel d'Artillerie, à Liége.
Martynowski, Répétiteur à l'Université.

1842. Trasenster, Professeur à l'Université.
Laguesse, Ingénieur des Mines, à Liége.
1844. Schmit, Répétiteur à l'Université.
Kupfferschlaeger, Isid., Professeur à l'Université.
1845. Delvaux, Adolphe, Ingénieur honoraire.
Leclercq, Directeur de l'École industrielle, à Liége.
1847. De Cuyper, Professeur à l'Université.
Schwann, id.
1853. Bède, Émile, id.
Candèze, Docteur en Médecine, à Liége.
Chapuis, F. id. , à Verviers.
1853. Paque, Professeur de Mathématique à l'Athénée.
1855. Dewalque, id. à l'Université.
Bourdon, Jules, Docteur en Sciences naturelles.
1854. Schaar, Professeur à l'Université.
1857. Houtain, Docteur en Sciences physiques et Mathématiques.
1859. Meier, id. id.
1860. Gillon, Répétiteur à l'Université.
Terssen, Major d'Artillerie, à Liége.
1861. Pérard, Répétiteur à l'Université.

Membres correspondants.

MM.

1835. Devaux, Inspecteur Général des Mines, à Bruxelles.
D'Omalius-d'Halloy, Propriétaire, à Halloy.
Dumortier, B. Membre de la Chambre des Représentants, à Tournai.
Quetelet, A. Directeur de l'Observatoire, à Bruxelles.
Timmerhans, Professeur à l'Université de Gand.
Teichman, Gouverneur de la Province d'Anvers.
1842. Van Beneden, Professeur à l'Université de Louvain.
1845. Decaisne, J. Professeur au Museum d'histoire naturelle, à Paris.
De Liebig (B^on^ Justin), Professeur de Chimie à l'Université de Munich.
Graham, Directeur de la Monnaie à Londres.
Pelouze, Membre de l'Institut à Paris.
Stas, J. J. Professeur à l'Ecole militaire, à Bruxelles.
Mitscherlich, id. à l'Université de Berlin.

1843. Nyst, H. Contrôleur des matières d'or et d'argent, à Anvers.
De Verneuil, Ed. Membre de l'Institut, à Paris.
Keiserling (Comte de), Membre de l'Académie de St. Pétersbourg.
Martius, (Chevalier de), Secrétaire de l'Académie royale des Sciences, à Munich.
Kickx, J. Professeur à l'Université de Gand.
Mohl, id. à l'Université de Tubingen.
Gervais, Doyen de la Faculté des Sciences, à Montpellier.
Sundevall, Professeur à Stockholm.
Putzeys, Secrétaire-Général au Ministère de la Justice, à Bruxelles.
Reichert, Professeur à l'Université de Berlin.
Valentin, id. à l'Université de Berne.
Wagner, id. id. de Gœttingue.
Longet, id. à la Faculté de Médecine de Paris.
Steichen, id. à l'École militaire, à Bruxelles.
Pioche, id. id.
Lamarle, id. à l'Université de Gand.
Breguet, Mécanicien, à Paris.
Masson, Professeur de Physiologie à la Sorbonne, à Paris.
Simonoff, Directeur de l'Observatoire de Casan.
Tcheffkine, Général Aide de Camp de l'Empereur de Russie, à St. Pétersbourg.
Berthier, Professeur à l'École des Mines, à Paris.
Combes, Ingénieur en chef des Mines et Professeur à l'École des Mines, à Paris.
Simonis, Répétiteur à l'Université de Gand.
Seyler, Docteur en Médecine, à Wiltz.

1844. Lecointe, Professeur de Mathématique supérieure à l'Athénée de Namur.
Malherbe, Juge au Tribunal de Metz.
Carez, Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Bruxelles.

1845. Van Rees, Professeur à l'Université d'Utrecht.
Maus, Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Mons.
Navez, Major d'Artillerie, à Bruxelles.
Michiels, Colonel d'Artillerie, à Liége.
Coquilhat, id. à Anvers.
Du Bus, Bernard (Vicomte), Directeur du Musée d'histoire naturelle de Bruxelles.
Hagen, Docteur en Médecine, à Königsberg.
Olivier, Professeur à l'École centrale de Paris.
Chasles, Membre de l'Institut, à Paris.

1845. Ambrosi, Répétiteur à l'École militaire, à Bruxelles.
Perdonnet, Ingénieur civil, à Paris.
1846. De Vriese, J. H. Professeur à l'Université de Leyde.
Klotzsch, J. P. Conservateur des herbiers royaux, à Schœnfeld, près de Berlin.
1847. Bosquet, Pharmacien, à Maestricht.
1848. Klipstein (von), Professeur à l'Université de Giessen.
1849. Michaelis, Professeur à l'Athénée de Luxembourg.
1851. Schroeter, Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, à Vienne.
Baumgartner, Président de l'Académie des sciences, à Vienne.
Jacobi, Membre de l'Académie de St. Pétersbourg.
Ansted, Professeur de Géologie, à Londres.
Schroeder van der Kolk, Professeur d'Anatomie à l'Université d'Utrecht.
Schlegel, Conservateur du Museum d'histoire naturelle de Leyde.
1852. Le Conte, J. L., Docteur en Médecine, à New-York.
Poncelet, Général du Génie, Directeur de l'École Polytechnique, à Paris.
Vrolik, W. Professeur d'Anatomie à l'Athénée d'Amsterdam.
Lyell, (Sir Charles), Membre de la Société royale de Londres.
Davidson, Th. Membre de la Société royale de Londres.
Steinheil, Professeur a l'Université de Münich.
Ettingshausen, Professeur de Physique à l'Université de Vienne.
Lamont, Directeur de l'Observatoire de Münich.
Dana, Professeur à Philadelphie.
Grant, id. à l'Université de Londres.
Von Ettingshausen, Constantin, à Vienne.
Pohl, Répétiteur de Chimie, à Vienne.
1853. Westwood, Membre de la Société entomologique de Londres.
Parry, id. id.
Waterhouse, Conservateur du Museum britannique, à Londres.
Perris, Ed. Chef de Division à la Préfecture de Mont de Marsan, (Landes).
Petrina, Professeur de Physique, à Prague.
1854. Koelliker, id. à l'Université de Würzbourg.
L. Dufour, Docteur en Médecine, à St. Sever, (Landes).
Dutreux, Receveur-Général, à Luxembourg.
Drouet, H. Naturaliste, à Troyes (France).
Weber, Professeur de Physique à l'Université de Göttingue.

1854. Stammer, Docteur à Dusseldorf.
Erlenmeyer, id. à Neuwied.
Lucas, Henri, Aide Naturaliste au Museum d'histoire naturelle, à Paris.
Blanchard, Emile, Aide Naturaliste au Museum d'histoire naturelle, à Paris.
1855. Plücker, Professeur à l'Université de Bonn.
Van Hauer, Membre de l'Académie des sciences de Vienne.
Nodot, Directeur du Museum d'histoire naturelle, à Dijon.
1856. Geinitz, B. B. Professeur à l'École Polytechnique de Dresde.
Catalan, à Paris.
Foucault, L. attaché à l'Observatoire de Paris.
Becquerel, E. Professeur de Physique au Conservatoire des Arts et Métiers, à Paris.
Despretz, Membre de l'Institut de France, à Paris.
Babinet, id. id. id.
Liais, Astronome à l'Observatoire de Paris.
Dumoncel, Physicien, à Paris.
Tchebicheff, Membre de l'Académie de St-Pétersbourg.
Michot, (abbé), Botaniste, à Mons.
1857. Jamin, Professeur de Physique à l'École Polytechnique, à Paris.
Sedgwick, A. Membre de la Société géologique de Londres.
Fitton, Docteur, à Londres.
Ray, J. Trésorier de la Société d'Agriculture de Troyes.
Wright, T. Docteur en Médecine, Membre de la Société royale d'Edimbourg.
1858. Schmit, Docteur en Sciences physiques et mathématiques, à Bruxelles.
De Binckhorst, propriétaire, à Maestricht.
De Caligny, à Versailles.
Wood, Edw. propriétaire, à Richmond, (Yorkshire).
1859. De Marseul, (abbé), à Paris.
Beyrich, Secrétaire de la Société géologique de Berlin.
Marcou, J. Professeur de Géologie, à Boston, (Etats-Unis).
1860. Dubois-Raymond, Professeur à l'Université de Berlin.
Encke, Directeur de l'Observatoire de Berlin.
Brücke, Professeur à l'Université de Vienne.
Thomassy, id. à la Nouvelle Orléans.
Müller, J. A. Professeur au Gymnase, à Aix-la-Chapelle.
Murray, A. id. à Edimbourg.
1861. Boucher de Crèvecoeur de Perthes (Jacques), Président de la Société Impériale d'Emulation d'Abbeville.
Colnet d'Huart, Professeur à l'Athénée de Luxembourg.

1861. Zeis, Conservateur du Museum royal d'histoire naturelle, à Dresde.

Magnus, Professeur de Physique à l'Université de Berlin.

Membres décédés depuis la Fondation de la Société.

MM.

Cauchy, Ingénieur en Chef des Mines, à Namur, membre correspondant.

Fohmann, Professeur à l'Université, membre fondateur.

Schmerling, Docteur en Médecine, membre fondateur.

Pagani, Professeur à l'Université de Louvain, membre fondateur.

Lemaire, Professeur à l'Université de Liége, membre fondateur.

Dumont, id. id. id. id.

Lesoinne, id. id. id. id.

Renault, Major d'Artillerie. id. id.

Guillery, Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Bruxelles, membre correspondant.

Buch, (Baron de) Chambellan de S. M. le Roi de Prusse, membre correspondant.

Gené, Professeur à Turin, membre correspondant.

Pioche, id. à l'École militaire, id.

Meyer, id. à l'Université de Liége, membre effectif.

Pelletier, rentier, à Paris, membre correspondant.

Galeotti, Botaniste, à Bruxelles, membre correspondant.

Lesson, (R. P.), Professeur à l'École maritime de Rochefort, membre correspondant.

Corda, Botaniste, à Prague, membre correspondant.

De la Bèche, H., Directeur du Musée de Géologie pratique, à Londres, membre correspondant.

Forbes, Ed. Président de la Société géologique de Londres, membre correspondant.

Haime, J. Professeur au Lycée Napoléon, à Paris, membre correspondant.

Von Baer, Membre de l'Académie de St Pétersbourg, membre correspondant.

I. — *Mémoire sur les genres et les sous-genres des Brachiopodes, munis d'appendices spiraux destinés au soutien des bras buccaux et sur leurs espèces découvertes dans les couches carbonifères des Iles Britanniques,*

PAR

Th. DAVIDSON,

MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ET SECRÉTAIRE DE LA SOCIÉTÉ GÉOLOGIQUE DE LONDRES,

Traduit et augmenté de quelques notes

PAR

Le Dr L. DE KONINCK,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

AVIS DU TRADUCTEUR.

Depuis vingt-cinq ans, M. Davidson se livre à l'étude des Brachiopodes et y consacre la majeure partie de son temps. Le nombre des observations qu'il a pu recueillir et celui des matériaux précieux qu'il a réunis dans sa collection ou qu'on lui a prêtés, est très-considérable. Aidé des travaux anatomiques et microscopiques de MM. Carpenter, Owen, Gratiolet, et surtout des récentes et magnifiques recherches de M. Hancock, il a été en état, beaucoup mieux qu'aucun de ses prédécesseurs, de dissiper les ténèbres qui enveloppaient il n'y a pas bien long-temps encore, l'organisation de cette classe intéressante d'animaux. M. Davidson est sans aucun doute aujourd'hui la première autorité dans cette partie des sciences zoologiques et ç'a été une véritable bonne fortune pour la société Paléontographique en particulier et pour la Paléontologie en général, d'avoir obtenu, d'un homme dont le zèle égale le savoir et à qui aucun sacrifice n'est de trop pour remplir consciencieusement la tâche assumée par lui, qu'il voulut bien se charger de la Monographie des Brachiopodes fossiles des Iles Britanniques. Déjà il a publié les

Monographies des Brachiopodes tertiaires, crétacés, jurassiques et permiens, ainsi qu'une partie de celle qui comprendra les Brachiopodes carbonifères; il les a fait précéder d'une *Introduction générale*, dans laquelle il a exposé toutes les découvertes récentes relatives à l'organisation des animaux qui font le sujet de ses études de prédilection, ainsi que la classification à laquelle il s'est définitivement arrêté. Mais comme ces publications, qu'il a accompagnées d'un grand nombre de planches, d'autant plus exactes et plus précieuses qu'elles ont été lithographiées par lui-même, ne peuvent se trouver dans toutes les mains, à cause de leur prix élevé, il a eu l'heureuse idée de réunir sa méthode concernant les Brachiopodes munis d'une spire calcareuse, dans un article publié par le *Géologist* et de le faire suivre de la liste de toutes les espèces carbonifères britanniques appartenant à cette division.

J'ai pensé que la traduction de ce mémoire serait utile aux personnes qui ne sont pas familiarisées avec la langue anglaise. J'ai cru en outre, devoir saisir cette occasion de faire connaître les espèces carbonifères belges appartenant à la même division et de publier quelques notes relatives à la distribution de ces espèces dans les différentes contrées de l'Europe. De cette façon, il me sera loisible de rectifier quelques erreurs qui se sont glissées dans mon ouvrage sur les fossiles carbonifères de Belgique, publié à une époque où les idées actuelles étaient loin de prévaloir et où la paléontologie n'avait pas encore acquis la précision, ni l'importance qu'on lui reconnaît généralement aujourd'hui.

La première des deux planches qui accompagne ce mémoire est celle même qui a paru à Londres. La Société Royale est redevable de cette faveur à l'obligeante intervention de l'auteur Anglais. Il en est de même de la gravure sur bois. J'ai ajouté la seconde planche, afin d'y reproduire quelques gravures sur bois que M. Davidson, a publiées dans un supplément à sa première notice (1) et d'y représenter quelques échantillons de ma collection dont la reproduction m'a parue devoir être utile.

L. D. K.

---

(1) J'ai intercalé les observations qui font le sujet de ce supplément, dans les parties du Mémoire auxquelles elles se rapportent.

Comme le Géologue a intérêt à connaître tout ce qui a rapport à la Paléontologie, il est probable que certaines observations relatives aux Brachiopodes et accompagnées de figures destinées à faciliter l'intelligence du texte, pourront être de quelque utilité, et auront pour effet d'engager d'autres naturalistes à poursuivre des recherches qui ont déjà coûté de si longs et de si nombreux travaux.

Un naturaliste très-distingué a remarqué avec justesse, qu'il y a avantage à ce qu'un certain nombre d'observateurs différents s'occupent d'un même sujet; la vérité de cet axiome a été complètement prouvée par toutes les connaissances acquises relativement aux affinités de la classification et l'anatomie des Brachiopodes (1).

Néanmoins, il est bon de faire observer, que bien que ce sujet ait donné lieu à des travaux considérables tant individuels que collectifs, il reste encore beaucoup de découvertes et de recherches à faire, avant que les problèmes concernant le caractère et l'histoire de la classe pourront être considérés comme définitivement résolus.

Tous les paléontologistes semblent être d'accord pour admettre que les Brachiopodes doivent se diviser en deux groupes principaux. Le premier sera composé de tous ceux dont les valves sont *articulées* au moyen de dents et de fossettes; le second renfermera les *non-articulés*, c'est-à-dire ceux dont les valves sont retenues en place au moyen de muscles et autres agents.

Les *Brachiopodes articulés* ont été provisoirement divisés en 5 familles qui sont : les *Terebratulidæ*, les *Spiriferidæ*, les *Rhynchonellidæ*, les *Strophomenidæ* et les *Productidæ*; les *Non-articulés* comprennent les *Craniadæ*, les *Discinidæ* et les *Lingulidæ*.

Je n'ai pas l'intention de m'étendre sur les caractères anatomiques de quelqu'importance qui distinguent ces deux groupes entre eux, ni d'entamer une discussion au sujet de leur classification générale; mon intention en ce moment consiste uniquement à exposer tout ce que l'on a connu anciennement et ce que

---

(1) La plupart des naturalistes ont considéré les Brachiopodes comme une classe particulière des Mollusques, mais les anatomistes ne sont pas tous d'accord sur cette question importante. M. Hancock, a cherché à démontrer l'analogie de structure entre les Brachiopodes et les Polyzoaires, tandis que, l'opinion du Dr Gratiolet, diffère de celle de Mr Owen, qui a placé les Brachiopodes entre les Lamellibranches et les Tuniciers.

l'on a appris récemment, concernant les genres qui sont garnis de lamelles spirales destinées à servir de support aux bras buccaux. Ma classification (aussi bien que toutes celles qui ont été proposées jusqu'ici) est plus ou moins artificielle et provisoire. Il ne doit pas paraître étonnant, que, forcé de chercher ma route à l'aide des quelques rayons de lumière que de récentes découvertes ont jetés sur le chaos dans lequel cette classe a été plongée pendant si longtemps, je me sois quelquefois heurté et que j'aie été obligé de revenir sur mes pas, et d'abandonner certaines conclusions, que pendant quelque temps, j'ai pu croire établies sur des fondements solides.

Comme on n'a encore découvert aucun Brachiopode vivant muni d'appareils spiraux-calcaires, il est impossible de déterminer au moyen d'un examen anatomique direct, la relation exacte qui existe entre ces appendices calcaires et les parties molles des bras buccaux. Néanmoins, l'existence dans deux espèces de *Rhynchonella* appartenant au groupe des *Articulés*, de bras membraneux, qui, bien que libres et privés de tout support, sont tournés en spirale et dirigés vers la concavité interne de la petite valve ou valve dorsale, d'une façon tout-à-fait semblable à celles que nous offrent les lamelles spirales dans le genre éteint des *Atrypa*, permet, jusqu'à un certain point, de supposer qu'il existe de l'analogie entre les appendices calcaires et les parties molles des bras buccaux.

Le Dr Gratiolet est d'avis que le bras médian des *Terebratula* est divisé chez le *Rhynchonella psittacea* en deux bras largement développés, munis d'une seule rangée de cirrhes et sans aucun support testacé, mais que probablement l'inverse a eu lieu chez les *Spirifera*, chez lesquels le bras moyen est supposé ne pas avoir existé; en outre, que les cirrhes ont été exclusivement limités par des appendices calcaires en forme de spire, partagés en deux parties indépendantes l'une de l'autre et parfaitement symétriques; mais ce point important ne pourra être définitivement tranché, que par de nouvelles recherches.

Les bras buccaux semblent avoir différé beaucoup quant à leur position et aux différents détails qui leur sont propres. Leur mode d'enroulement varie beaucoup dans les divers genres articulés; il n'y a d'exception que pour ceux qui composent la grande famille des *Terebratulidæ*, chez lesquels le bras médian seul a été tourné en spirale. Chez les *Rhynchonella*, les *Strophomene*

et les *Productus* les bras ont été tournés en spirale, mais n'ont eu aucun support testacé, tandis que chez les *Spirifera*, les *Athyris* et leurs sous-genres, les bras spiraux ont été supportés ou limités par deux longues lamelles, tournées en spirale et ayant leurs extrémités dirigées en dehors.

Chez les *Atrypa*, *Davidsonia*, *Koninckina* et *Anoplotheca*, les deux lamelles tournées en spirale, sont verticales et dirigées vers le fond de la valve, ou disposées horizontalement, chaque tour de spire étant sensiblement parallèle à la surface interne d'une valve.

Leurs principaux caractères résident par conséquent dans ces bras tournés en spirale et dans les apophyses qui les supportent; mais on s'est demandé, si l'on peut ou si l'on doit placer dans la même famille, des animaux dont les bras sont libres et ceux chez lesquels ces bras sont bordés ou soutenus par des lamelles calcareuses. M. S. G. Woodward est d'avis que les *Atrypa* doivent être séparées des *Spirifaridæ* et que leur place se trouve parmi les *Rhynchonellidæ*, parce qu'il considère la calcification des supports oraux comme *un caractère d'une valeur incertaine.*

Cette opinion mérite certainement d'être examinée, quoique je ne cache pas, que j'étais disposé, lorsque j'écrivais mon *Introduction générale*, à placer les *Atrypa* de Dalman dans la même famille où se trouvaient les *Spirifera* et les *Athyris.* Il a été avancé, que parmi les *Terebratulidæ* certaines espèces n'avaient leurs bras buccaux, supportés qu'à leur origine, comme cela a lieu chez les *T. vitrea*, *caput-serpentis*, etc., tandis que dans d'autres genres la bandelette apophysaire occupe une grande partie de l'intérieur de la coquille, P. E. chez les *Waldheimia*, *Terebratella*, etc.; néanmoins, bien que la présence et le développement des pièces calcaires aient pu être un bon caractère pour grouper des formes similaires dans un même genre, leur présence ou leur absence, ne paraît pas avoir nui au développement du bras lui-même, ou de sa membrane.

Il est donc à supposer qu'il en est de même des espèces garnies de bras spiraux.

La classification des espèces garnies de supports spiraux mérite une certaine attention et exige quelques recherches ultérieures; cependant, il me paraît, que dans ce moment et eu égard à nos connaissances actuelles, les espèces peuvent être groupées ensemble de la manière suivante :

1 — Genre SPIRIFERA, (1) Sow.; type *Sp. striata*, Martin.
? Sous-genre CYRTIA. Dalman; *C. exporrecta*, Wahl.
» *Spiriferina*, d'Orb.; *S, rostrata*, Schloth.
» *Suessia*, E. Deslongs.; *S. costata*. Desl.
» *Cyrtina*, Dav.; *C. septosa*, Phillips.

2 — Genre ATHYRIS, M'Coy, — *Spirigera*, d'Orb.; *A. concentrica*, V. Buch.
Sous-genre, *Merista*, Suess; *M. Herculea*, Barrande.
» *Retzia*, King; *R. Adrieni*, de Vern.
» *Trematospira*; Hall; *T. perforata*, Hall.
» *Nucleospira*, Hall; *N. ventricosa*, Hall.
» *Uncites*, Defr.; *U. gryphus*, Defr.

3 — Genre ATRYPA, Dalman. — *Spirigerina*, d'Orb.; *A. reticularis*, Linn.

4 — Genre KONINCKINA, *Suess*; *K. Leonhardi*, Wissemann.
» ANOPLOTHECA, G. Sandberger; *A. lamellosa*, G. Sandb.
» DAVIDSONIA, Bouchard; *D. Verneuilii*, Bouchard.

J'ai moi même rassemblé les groupes N° 1, 2 et 3 dans une seule famille, sous le nom de *Spiriferidæ* et cet exemple a été suivi par plusieurs auteurs, mais M. Woodward en a exclu le 3me groupe, qu'il a réuni aux *Rhynchonellidæ*.

Depuis plusieurs années déjà, M. le Professeur King, à proposé la famille des *Davidsonidæ*, dans laquelle certains auteurs comprennent outre les *Davidsonia*, les *Anoplotheca* et les *Koninckina*.

Les caractères distinctifs des *Spirifera*, des *Athyris* et des *Atrypa* ont été si parfaitement établis, qu'il ne peut y avoir le moindre doute sur la définition et la conservation de ces trois genres.

Les espèces qui composent le genre si remarquable et si étendu des *Spirifera*, créé par Sowerby, ont des formes très-différentes : tandis que les unes sont transverses, d'autres sont allongées ou arrondies ; les unes sont lisses ou anguleuses, d'autres sont couvertes de côtes ou de stries ; les unes ont leur petite valve garnie d'un bourrelet médian et leur grande valve d'un sinus correspondant, d'autres n'en possèdent pas de traces ; toutes néanmoins se distinguent par une charnière en ligne droite, mais

(1) J'ai conservé le nom générique de *Spirifera* employé par M. Davidson, quoique je sois d'avis que l'expression de *Spirifer* doit lui être préférée, parce que c'est le terme dont s'est servi Sowerby, quand il a créé le genre.

L. D. K.

d'une longueur très-variable ; la grande valve est munie d'une area plane ou concave, d'une forme triangulaire ou à bords subparallèles, mais très-différente dans ses longueur, largeur et hauteur, suivant les espèces. Cette area est partagée en deux parties égales, par une ouverture triangulaire, libre dans le jeune âge, mais se retrécissant plus ou moins graduellement pendant la croissance de la coquille, au moyen d'une seule ou de deux petites plaques courbées, insérées dans le voisinage de la charnière, et auxquelles M. de Koninck, a donné le nom de *pseudodeltidium*. La petite valve possède également une area étroite. Les valves des *Spirifera*, et de tous les genres et sous-genres de la même famille, sont articulées au moyen de dents recourbées, placées de chaque côté à la base de la fissure et s'ajustant dans des fossettes correspondantes de la valve opposée. Dans la grande valve, des plaques calcaires verticales servent de support aux dents. Ces plaques après avoir servi de limite à la fissure, s'étendent du crochet jusqu'au fond de la valve ; elles sont petites ou grandes, régulièrement divergentes, ou convergentes d'abord pour diverger de nouveau ; ensuite elles avancent plus ou moins vers l'intérieur de la valve. Entre ces plaques et quelquefois en dessous d'elles, la majeure partie du fond de la coquille porte des impressions musculaires, parfois partagée en deux au moyen d'une faible crête longitudinale. Le muscle adducteur qui a pour fonction de fermer la coquille, détermine sur la valve à son point d'insertion, une impression ou cicatrice étroite de forme ovale allongée; de chaque côté de celle-ci, on remarque les impressions des muscles cardinaux, qui sont les antagonistes du précédent et qui ont servi à ouvrir la coquille. (1)

A l'intérieur de la petite valve (valve dorsale), se trouvent deux grandes spires coniques, remplissant presque complètement l'intérieur de la coquille, ayant leurs extrémités dirigées vers les angles extérieurs et latéraux de la coquille ; mais tandis que les bases de ces cônes creux se touchent presque du côté de la charnière, elles se trouvent à une assez grande distance du côté du front. L'area cardinale est divisée en deux parties, auxquelles les branches principales de la spire sont soudées et dans la

(1) Pour plus amples détails, on peut consulter l'admirable mémoire de M. A. Hancock, intitulé : *On the anatomy of the Brachiopoda*, très-récemment publié dans les Transactions de la Société Royale de Londres.

rainure et au-dessous de l'extrémité du crochet, on remarque une apophyse calcaire, à laquelle se trouvait attachée l'autre extrémité du muscle cardinal (divaricator muscle). Un peu plus bas, la valve porte à sa surface, quatre grandes impressions produites par le muscle adducteur (anterior et posterior occlusor muscle de M. Hancock). Par conséquent, et quoique nous n'ayons pas pu distinguer parfaitement sur la grande valve des *Spirifera*, les impressions du divaricateur accessoire, et du muscle du pédicule ventral ou ajusteur, ni celle du muscle du pédicule dorsal ou ajusteur sur la petite valve, il est probable que ces muscles ont existé, mais qu'ils n'ont pas laissé subsister des impressions aussi bien déterminées que celles que l'on observe sur les valves correspondantes des *Terebratula*.

Le sous-genre *Spiriferina* présente quelques caractères bien marqués, au moyen desquels il sera facile de le distinguer des *Spirifera* proprement dits. Malgré la ressemblance externe des coquilles de ces deux genres, la structure de celle des *Spirifera* ne présente pas de traces du système de canaux ou de perforations dont est criblée la coquille de toutes les espèces de *Spiriferina* actuellement connues (1).

Il est probable qu'à ce caractère s'en ajoutaient d'autres provenant de modifications importantes dans la structure de l'animal, mais dont l'existence serait difficile à prouver, dans l'état actuel de la science; cependant, on peut jusqu'à un certain point, tirer cette conclusion, de la différence de conformation des parties internes de la grande valve ou valve ventrale, car il existe chez toutes les espèces de *Spiriferina* entre les plaques dentales ou rostrales divergentes une cloison médiane très-développée que l'on n'observe jamais chez les *Spirifera* et qui servait d'attache au muscle adducteur.

Quoique les *Spiriferina* soient beaucoup plus rapprochés des *Spirifera* et peut-être aussi des *Suessia* que d'aucun autre genre, on peut cependant les conserver avantageusement comme coupe particulière, par les raisons que nous venons d'indiquer, afin d'y introduire les espèces, qui outre le test perforé, possèdent encore une crête médiane bien développée à l'intérieur de la valve ventrale.

---

(1) Voir les additions à la fin du Mémoire.

L. D. K.

Dalman a créé le sous-genre *Cyrtia* pour y introduire les formes de *Spirifera*, dont le pseudo-deltidium de la grande valve est percé d'une ouverture circulaire. L'auteur n'a fourni aucun renseignement sur la structure interne de ses deux espèces typiques, *le Cyrtia exporrecta* et le *C. trapezoïdalis*. Après 1827, différents auteurs ont rapporté au genre *Cyrtia* plusieurs autres espèces que celles que je viens de citer ; parmi celles-ci, il s'en est trouvé dont la coquille était perforée, tandis que les espèces de Dalman n'ont pas le test ponctué, pas plus que les *Spirifera* proprement dits.

Ce n'est que tout récemment que je suis parvenu à découvrir quelques uns des caractères des espèces suivantes : *C. exporrecta ; C. trapezoïdalis*, *C. Murchisoniana ; C. cuspidata ; C. heteroclyta ; C. Demarlii et C. septosa*. Il résulte de mes recherches, que chez les quatre premières, qui appartiennent au genre de Dalman, les caractères internes sont semblables, mais différents de ceux des trois dernières. Celles-ci ne peuvent donc pas être convenablement retenues dans le même groupe, ni conserver le même nom générique, car il est évident, que des différences considérables dans l'arrangement des plaques de la valve ventrale, ont dû occasionner des différences importantes dans les parties molles de l'animal. En conséquence, j'ai proposé (au moins provisoirement) de former un sous-genre du groupe dont font partie les *C. heteroclyta*, *C. Demarlii*, *C. septosa*, *C. dorsata* et probablement aussi le *C. carbonaria* et de le désigner sous le nom de *Cyrtina*, en conservant celui de *Cyrtia* pour les espèces analogues aux *C. exporrecta*, *C. Murchisoniana*, etc. ; cependant il est nécessaire de faire observer, que le genre de Dalman est lui-même fondé sur un caractère de si peu d'importance, qu'il y aura lieu d'examiner par la suite, s'il devra être conservé, ou si on devra le considérer comme synonyme du genre *Spirifera* de Sowerby.

Chez les *Cyrtia* une petite dent cardinale se trouve placée de chaque côté et à la base de la fente ; cette dent est soutenue par des plaques calcaires verticales, qui s'étendent en divergeant, depuis l'extrémité du crochet, où elles servent de parois à la fente, jusques vers le tiers environ de la longueur de la valve, absolument comme cela a lieu chez un grand nombre de *Spirifera*. Les *Cyrtia*, pas plus que les *Spirifera*, ne possèdent d'arête médiane ou septum ; seulement le pseudodeltidium qui recouvre

la fente, est généralement, mais non pas toujours, percé d'un trou circulaire produit par un prolongement tubulaire ainsi qu'on le remarque sur certains échantillons chinois du *Cyrtia Murchisoniana*, de Kon. (1).

Les appendices spiraux de la petite valve sont dirigés en dehors, et remplissent à peu près la cavité de la coquille ; leur mode d'attache est parfaitement identique à celui des *Spirifera*. En conséquence, les *Cyrtia* ne peuvent être distingués des *Spirifera* que par leur pseudodeltidium et l'ouverture qu'il possède ; ces caractères sont à peine suffisants pour permettre de les ériger en sous-genre.

Chez les *Cyrtina* on n'observe pas les arêtes divergentes ci-dessus décrites, mais en revanche, on trouve à l'intérieur de leur valve ventrale, deux cloisons contiguës et verticales, qui se transforment en une plaque unique médiane, s'étendant de l'extrémité du crochet jusqu'à une petite distance du bord frontal et se bifurquant ensuite pour former les plaques dentales, d'une façon tout-à-fait analogue à celle que l'on observe chez les *Pentamerus* (Pl. II, fig. 2). La fente est recouverte d'un pseudodeltidium voûté ; néanmoins M. Bouchard a fait l'observation, que chez le *C. Demarlii*, la cloison médiane s'étend jusque contre le pseudodeltidium, (Pl. I, fig. 13), en sorte que les plaques dentales sont soudées aux côtés du septum au lieu de l'être à sa partie supérieure, comme chez les *C. heteroclyta* et *septosa*. La conformation interne de la petite valve, ne m'est connue que par le moule interne que j'ai représenté Pl. II, fig. 1. Cet échantillon démontre que les impressions musculaires de cette valve sont en tout semblables à celles des *Spirifera*, et que la valve elle-même ne possède pas de septum analogue à celui des *Pentamerus*. La ressemblance avec ce dernier genre, consiste plutôt dans la disposition du septum médian, et des plaques dentales convergentes ou dentales de la valve ventrale.

Comme jusqu'à présent, on n'y a pas encore découvert des traces de spire, il est impossible de donner une définition exacte et définitive de ce genre ou sous-genre ; il est à espérer que les personnes qui habitent des districts où l'on rencontre certaines espèces de *Cyrtina*, cherchent à en compléter la conformation interne.

---

(1) Voir mes observations sur le *C. distans*, Sow., à la fin du Mémoire.

Un autre sous-genre qui mérite aussi notre attention, a été créé par M. E. Deslongchamps, sous le nom de *Suessia ;* mais comme ses caractères internes ne sont encore qu'imparfaitement connus, il sera nécessaire d'attendre des renseignements ultérieurs, pour décider s'ils sont suffisants pour le maintenir à l'état de genre ou de sous-genre. Les deux branches qui servent à former le cône spiral, sont reliés ensemble par une petite bandelette transverse et calcareuse, du milieu de laquelle s'élève une autre petite lamelle se dirigeant vers le fond de la valve. Les espèces qui forment ce petit groupe, possèdent une plaque cardinale extraordinairement grande, ainsi que deux appendices d'une conformation singulière, lesquelles, prenant naissance sur les bords des fossettes cardinales, se dirigent vers l'intérieur de la valve. Aucun autre genre appartenant à la famille des *Spiriferidæ* n'a encore offert une semblable conformation.

Notre second groupe comprend provisoirement un certain nombre d'espèces ayant la forme des *Terebratula*, dépourvues d'une area bien marquée, à ligne cardinale, courbe, à crochet entier, ou tronqué, percé d'un trou circulaire ayant servi de passage au pédoncule permanent ou temporaire, et à appendices spiraux dirigés en dehors, comme chez les *Spirifera*, mais reliés au moyen d'un système de lamelles plus compliqué que chez ces derniers. Néanmoins, il reste encore bien des choses à découvrir, relativement à l'organisation intérieure de la plupart des espèces de ce groupe, avant que nous puissions avoir l'espoir de le diviser en sections satisfaisantes et définitives.

Quoique le genre *Athyris* ait attiré depuis plusieurs années, l'attention des paléontologistes, ce n'est que depuis peu que l'on ait pu établir tous les caractères importants qui le distinguent. La forme extérieure des espèces est extrêmement variable ; elle est circulaire ou anguleuse, allongée ou transverse, lisse, striée ou costulée ; quelques espèces ont toute leur surface externe couverte de plaques concentriques ayant souvent plus d'un pouce de largeur, tandis que d'autres portent un grand nombre de rides écailleuses qui se prolongent en une infinité de longues épines rayonnantes légèrement aplaties ; ces ornements sont quelquefois tellement serrés, qu'il est impossible de distinguer la moindre partie du test.

Le crochet de la grande valve est quelquefois tellement recourbé, sur la petite valve, que pendant long-temps on s'était imaginé

à tort, que les espèces de ce genre étaient dépourvues d'ouverture. C'est par suite de cette erreur que M. M'Coy proposa pour ce groupe le nom générique d'*Athyris*, dont l'étymologie semble impliquer une coquille non perforée (1). Il est toutefois certain que la plupart des espèces et des échantillons sont garnis d'un crochet tronqué et d'une ouverture circulaire, de sorte que l'on doit en conclure nécessairement, qu'à certaines époques de sa vie, l'animal, suivant les circonstances particulières dans lesquelles il se trouvait, avait la faculté de devenir libre, par suite de la forte courbure que prenait son crochet et de l'impossibilité où celui-ci se trouvait de continuer à donner passage aux fibres pédonculaires.

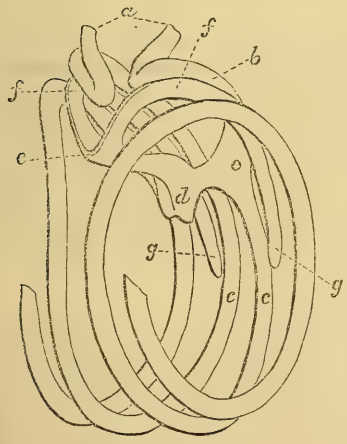
Les dents cardinales de la grande valve, sont soutenues par des arêtes calcaires verticales et la partie de la surface interne de la valve comprise entre ces arêtes et celle qui se trouve en dessous, est couverte d'impressions musculaires. Le muscle, qui avait pour fonction de fermer la coquille, a laissé une impression médiane étroite, allongée et cordiforme ; au-dessous de celle-ci et sur ses côtés, on observe les impressions des muscles cardinaux, c'est-à-dire de ceux qui servaient à ouvrir la coquille. Les impressions du muscle pédiculaire ou de celui qui sert à fixer la valve ventrale (ventral adjustor muscle) sont également très-visibles de chaque côté de celles du muscle abducteur ; de sorte qu'il semble que les impressions musculaires, se trouvent placées dans cette valve des *Athyris* d'une manière parfaitement analogue à celles que porte la valve correspondante des *Terebratula*, quoiqu'il soit impossible d'apercevoir la moindre trace des muscles divaricateur accessoire et capsulaire ou pédonculaire ; mais il est bon de faire remarquer que ces impressions ne sont pas toujours très-distinctement visibles sur les valves des *Terebratula*.

---

(1) M. Phillips avait proposé le nom de *Cleiothyris* plusieurs années avant celui adopté par M. M'Coy ; son étymologie rencontre les mêmes objections que celle d'*Athyris*. La plupart des auteurs du continent, n'adoptent ni l'un ni l'autre de ces noms et préfèrent celui de *Spirigera* proposé bien plus récemment par d'Orbigny. J'aurais volontiers suivi leur exemple, si dans ce cas comme dans bien d'autres, des naturalistes n'avaient pas conservé des noms impliquant des contradictions zoologiques. (Si M. Davidson avait été conséquent avec lui-même, il aurait dû remplacer le nom d'*Athyris* par celui de *Cleiothyris*, qui est le plus ancien : c'est ce que je propose. L. DE K.).

A l'intérieur de la petite valve, la plaque cardinale est garnie de quatre dépressions ou fossettes, qui ont servi de points d'attache aux muscles ajusteurs dorsaux ou du pédoncule dorsal, et qui ont servi, selon M. Hancock, à mouvoir la coquille sur le pédoncule et à la fixer.

Cette plaque cardinale est également percée tout près de son sommet (sous le crochet), d'une petite ouverture circulaire, qui dans certaines espèces est en communication avec un petit tube cylindrique, lequel, prenant naissance sous le plateau cardinal, s'étend longitudinalement, libre et courbé, jusqu'au tiers environ de la longueur de la valve. La surface interne de la valve est divisée au moyen d'un petit sillon longitudinal et porte visiblement les impressions de l'*adductor longus anticus* de M. Owen (*anterior occlusor* de M. Hancock); mais je n'ai jamais pu apercevoir les impressions du *posterior occlusor* sur aucune des nombreuses valves que j'ai eu occasion d'examiner. Il est probable que le muscle occluseur a quatre attaches dans cette valve, comme chez les *Terebratula* et autres genres. De chaque côté de la plaque cardinale, déjà décrite et de son ouverture, il existe une plaque calcaire, placée à un niveau supérieur, et formant l'extrémité interne des rebords des fossettes. Ces deux appendices s'allongent et donnent naissance (en servant de points d'attache) aux deux lamelles (*a*) qui, en se contournant de chaque côté, forment les spires, ainsi que l'appareil intermédiaire servant à les réunir. Les lamelles spirales, disposées verticalement au plan de la valve, convergent d'abord, puis à une petite distance de leur origine se recourbent subitement sur elles-mêmes en se dirigeant en dehors et en arrière (*b*) pour former un demi-cercle; celui-ci passe en premier lieu près des fossettes (*b*), ensuite se dirige vers le fond de la valve (*o*, *c*) pour se recourber de nouveau et produire ainsi le premier des sept ou huit tours dont chaque cône est composé. Des deux premières lamelles



spirales, il surgit perpendiculairement deux autres lamelles secondaires (*o*, *d*) lesquelles s'étant recourbées, se relient entre elles, vers le milieu de la coquille (*d*) et entre les deux cônes spiraux, en ne donnant lieu qu'à une seule branche (de *d* à *e*). Celle-ci, après avoir atteint le niveau supérieur de la spire (à *e*), se bifurque de nouveau, pour donner naissance à deux autres lamelles (*f*) recourbées en demi-cercle et se terminant librement en arrière (*g*) entre le premier et le second tour de chaque cône spiral.

Telles sont au moins les dispositions de la spire et des autres parties internes de l'*Athyris pectinifera*, et il est probable qu'elles sont les mêmes pour tout le groupe; néanmoins il serait très-important de savoir si les *A. concentrica* et *Royssii* et quelques autres espèces du même genre, ont la même organisation, surtout, qu'il a été avancé, que les caractères internes du test sont les mêmes chez ces deux espèces que je viens de nommer (1).

Le genre *Merista* a été proposé par M. Suess pour désigner certaines espèces analogues aux *Athyris*, mais qui offrent quelques dispositions internes spéciales, ne se retrouvant pas chez ces

---

(1) Quoique les impressions musculaires de la grande valve des *Athyris* ou *Spirigera* soient en général bien visibles, et aient été figurées correctement, et parfaitement décrites, néanmoins celles de la petite valve sont rarement distinctes. Les cicatrices produites par le muscle adducteur ou occluseur antérieur, ont été indiquées par Bouchard dans l'*Athyris concentrica*; mais les impressions de la paire postérieure n'ont pu être reconnues sur aucune des nombreuses valves qu'il avait en sa possession. Il est cependant probable, pour ne pas dire *certain*, que chez cette espèce, comme chez toutes celles du même genre, l'adducteur ou occluseur avait quatre points d'attache à la valve ventrale.

Le Docteur Sandberger a représenté les impressions musculaires des deux valves de l'*Athyris undata*; son dessin laisse cependant à désirer et ne comporte pas en tout cas, l'exactitude, qu'offre celle qui nous est fournie par plusieurs moules internes silidifiés de l'*Athyris ambigua* trouvés dans le calcaire carbonifère de Bakewell (Derbyshire) et faisant partie de la collection du Muséum de Géologie pratique. La Pl. II, fig. 14 et 15, en reproduisent des dessins grossis.

Je donne également une figure de la disposition interne de la valve dorsale de ce même Athyris, afin de démontrer qu'elle est la même que celle indiquée dans l'*A. pectinifera* et qu'il ne peut y avoir le moindre doute que cette conformation ne soit la même pour toutes les espèces du genre. (Pl. II, fig. 16.)

dernières. Il est toutefois certain, que, dans leur jeune âge, les *Merista* ont été garnis d'un trou circulaire qui a servi de passage au pédoncule et que cette ouverture a été fermée à un âge plus avancé, à cause de l'incurvation du crochet. L'intérieur de la grande valve diffère de celui des *Athyris*, en ce qu'il renferme une plaque arquée ou processus, située entre les plaques dentales; et celui de la petite valve de ce genre, par l'absence d'une plaque cardinale régulière, cette partie de la coquille étant partagée en deux au moyen d'un petit canal, d'où s'élève une grande et profonde cloison longitudinale ou septum, occupant à peu près les deux tiers de la longueur de la coquille, tandis que chez les *Athyris* on ne remarque qu'un faible sillon.

Les appareils spiraux sont fixés aux prolongements des rebords des fossettes; leurs extrémités sont dirigées en dehors; comme jusqu'ici, on n'a pas encore pu observer nettement la structure des appendices internes, il est à désirer que l'on fasse des recherches ultérieures, afin d'arriver à une restauration complète de ces appareils. Le test des *Athyris* et des *Merista* n'est pas ponctué (1).

M. King a appliqué le nom de *Retzia* à certaines coquilles terebratuliformes, possédant une petite area cardinale, un crochet tronqué et une ouverture circulaire en partie formée au moyen d'un deltidium bien distinct. Ses spires ont leurs extrémités dirigées en dehors et le test est ponctué. Des recherches ultérieures sont nécessaires avant de pouvoir représenter d'une manière exacte, les détails de la structure interne de ces coquilles.

Aux pages 207-218 du troisième volume de la Paléontologie de New-York, M. J. Hall a proposé deux nouveaux genres ou sous-genres, sous les noms de *Trematospira* et *Nucleospira*; mais comme je ne connais aucune des espèces qui s'y rappor-

(1) Les impressions musculaires de la grande valve des *Merista* sont semblables à celles des *Athyris*, mais on ne connaît pas encore parfaitement celles de la valve opposée. La présence d'une plaque cardinale n'est pas absolument indispensable pour l'insertion des muscles dorsaux pédiculaires ou dorsaux ajusteurs, puisque M. Hancock a fait l'observation, que chez la *Waldheimia Cranium* et chez la *Terebratulina Caput-Serpentis*, les muscles dorsaux ajusteurs ne sont pas attachés à une plaque cardinale, mais insérés dans la valve même et que chez une espèce peu différente de la *W. australis* les muscles divaricateurs et divaricateurs accessoires sont réunis.

tent, et comme je ne possède pas les planches qui les représentent, je dois me borner à fournir des extraits des descriptions faites par l'auteur.

Les *Trematospira* sont des coquilles terebratuliformes, ayant leurs spires disposées comme celles des *Spirifera;* leur crochet est tronqué et percé d'une ouverture circulaire, qu'un deltidium sépare du bord cardinal; ils seraient donc identiques aux *Retzia*, s'ils n'en différaient par leur forme extérieure et quelques autres caractères. L'auteur attache une grande importance à la présence d'une fossette triangulaire profonde placée au-dessous du crochet de la grande valve, et comblée par le crochet faiblement recourbée de la valve opposée; mais comme de l'aveu même de M. Hall, l'état de l'échantillon ne permettait pas d'obtenir des renseignements satisfaisants sur sa structure interne, le genre ne peut pas être considéré comme suffisamment bien établi.

Les *Nucleospira* sont des coquilles de forme sphæroïdale ou transversalement elliptique, possèdant des spires analogues à celles des *Spirifera;* le crochet de leur grande valve se recourbe au-dessus de la valve opposée; en-dessous de ce crochet on observe une petite dépression ou area donnant parfois lieu à la formation d'une fossette peu profonde; une côte ou cloison étroite s'étend à l'intérieur de la valve, le long du centre, depuis le crochet jusqu'à la base; la valve dorsale possède un appareil cardinal solide, en forme de spatule, lequel s'élevant verticalement du bord cardinal, est fortement saisi à sa base par les dents cardinales de la valve opposée et ensuite, se courbant subitement vers le haut en s'élargissant, se rend dans la cavité de la valve ventrale; le milieu du côté supérieur de cet appareil, possède une rainure ou une dépression, destinée à servir de passage à un pédoncule, qui traverse la petite ouverture dont le crochet est parfois garni.

L'appareil brachial supportant les spires, prend son origine sur les côtés de l'appareil que nous venons de décrire, au-dessus de la jonction des dents de la valve opposée et du point où il se recourbe. Une cavité profonde située en-dessous de la charnière, s'étend jusqu'au crochet dorsal, d'où s'élève une mince cloison qui atteint la base de la coquille. Un faible espace, de forme ovale, reçoit les empreintes musculaires. Le test a une texture ponctuée et lorsqu'il est bien conservé, sa surface est couverte de petites épines piliformes. Je renvoie au reste le

lecteur au magnifique ouvrage de M. Hall, où il trouvera une excellente description des diverses espèces (1).

On n'a encore découvert qu'une ou deux espèces du genre *Uncites* et leur structure interne n'a pas encore été élucidée à mon entière satisfaction. La coquille est de forme ovale allongée; le crochet de la valve ventrale est long, conique, recourbé à son extrémité, creux et tronqué dans le jeune âge et muni d'une petite ouverture ovale (Pl. I, fig. 25, F.); il n'existe pas de vraie area; l'ouverture est en partie fermée par un grand deltidium concave, qui s'étend jusque vers le bord cardinal; les côtés du crochet de chacune des deux valves se prolongent quelquefois intérieurement et produisent alors de profondes dépressions ou poches ouvertes à l'extérieur, mais n'ayant aucune communication directe avec l'intérieur (Pl. I, fig. 23 et 24, *g.*). Les impressions musculaires ne sont pas encore connues et l'existence d'appareils spiraux n'a encore été constatée que sur un seul échantillon bien imparfait (Pl. I, fig. 23, L.).

Le troisième groupe ne comprend jusqu'à présent qu'un seul genre, auquel Dalman a donné le nom d'*Atrypa*, parcequ'il a cru que les coquilles étaient privées d'ouverture; néanmoins, et quoique l'ouverture soit oblitérée dans certains échantillons à cause de la forte courbure de leur crochet, on peut souvent en observer l'existence, non seulement sur des jeunes individus, mais encore sur d'autres qui ont atteint leur plus complet développement; dans ce cas, elle est séparée de la ligne cardinale au moyen d'un deltidium bien prononcé. Il résulte de ceci, que le nom d'*Atrypa* ne convient pas pour désigner les coquilles de ce genre; si on le conserve, il est nécessaire de faire abstraction de son origine et de le considérer comme une simple dénomination, sans signification aucune. Sur le continent on remplace souvent le nom d'*Atrypa* par celui de *Spirigerina;* un grand nombre d'auteurs donnent néanmoins la préférence au premier, à cause de sa priorité. Les espèces de ce genre ont été bien étudiées, et leur structure interne est presque complètement connue. La coquille

(1) La figure de l'espèce qui semble avoir servi de type à l'établissement de ce genre, a une telle ressemblance avec certains échantillons de l'*Athyris Roissyi*, que je ne serais nullement surpris d'apprendre, que ce fut de cette espèce dont M. Hall s'est servi dans cette circonstance.

L. DE KON.

est de forme circulaire, allongée ou transverse ; sa surface est lisse ou diversément plissée et couverte d'un grand nombre de lames imbriquées, produites par l'accroissement successif et se transformant quelquefois en longues épines tubuleuses ou en expansions foliacées qui s'étendent souvent au-delà des bords. A l'intérieur de la grande valve et à la base des dents, se remarque de chaque côté une crête semicirculaire, servant de limite à une dépression ayant la forme d'une soucoupe ouverte du côté du front. Cet espace est entièrement couvert d'impressions musculaires, le muscle adducteur ou occluseur, donne lieu à une petite impression médiane, de forme ovale allongée (Pl. I, fig. 27, A). A côté de celle-ci se trouvent deux impressions plus larges produites par les muscles cardinaux ou divaricateurs (Ibid. R), lesquelles à leur tour sont flanquées de celles du muscle pédiculaire ventral ou ajusteur (Ibid. P.). Cette disposition est très-analogue à celle qui s'observe chez les *Terebratula*, les *Rhynchonella* et d'autres genres de Brachiopodes articulés. L'intérieur de la valve dorsale ne porte pas de lame cardinale distincte, mais les fossettes sont larges et sur leurs bords se trouvent implantés deux petits cylindres qui donnent naissance à deux larges lamelles spirales (Pl. I, fig. 26 et 28) qui se contournent pour former deux grands cônes creux serrés l'un contre l'autre, et ayant leurs extrémités dirigées vers le fond et le centre de la valve. A l'intérieur de la valve, la quadruple impression du muscle adducteur ou occluseur antérieur et postérieur est séparée au milieu, par une petite crête longitudinale (Pl. I, fig. 29, A). Tous ces caractères seront beaucoup mieux compris par un coup d'œil jeté sur nos figures que par la description la plus détaillée.

Le genre *Koninckina* a été créé par M. Suess pour une coquille remarquable, qui pendant longtemps a été placée parmi les *Productus*. Elle est concavo-convexe, très-déprimée, à crochet assez développé et recourbé ; on ne lui connaît pas de charnière articulée. La petite valve est concave extérieurement, convexe à l'intérieur ; les bras oraux étaient soutenus par deux faibles lamelles spirales, formées de quatre tours espacés se dirigeant vers l'intérieur et à peu près parallèles au plan de la coquille. On n'en connaît pas encore les impressions musculaires, mais celles des vaisseaux sont fortement marquées sur la petite valve (Pl. I, fig. 35 et 36).

Le Docteur G. Sandberger a proposé le genre *Anoplotheca* pour

une coquille qu'il considère comme rapprochée des *Koninckina*, mais qui s'en distingue néanmoins par quelques caractères. Les coquilles de ce genre sont concavo-convexes et ne possèdent ni area, ni deltidium. Le mode d'attache des spires n'est qu'imparfaitement connu ; celles-ci sont composées d'environ dix tours; la base du cône qu'elles produisent, est inclinée sous un angle aigu sur le plan médian de la coquille (Pl. I, fig. 30), tandis qu'il lui est parallèle chez les *Spirifera* et perpendiculaire chez les *Atrypa*. Cette spire diffère de celle des *Koninckina*, par un plus grand nombre de circonvolutions. L'intérieur de la valve dorsale n'est pas garni de plaque cardinale; les fossettes destinées à recevoir les dents de la valve opposée sont extraordinairement grandes et profondes ; elles sont séparées l'une de l'autre, par un appareil cardinal, d'une forme toute particulière, au-dessous duquel on remarque une petite dépression ovale, bordée d'une crête élevée, dont l'usage n'a pas encore été expliqué. A côté de celle-ci, se remarque la quadruple impression du muscle adducteur (Ibid. A), ou occluseur antérieur et postérieur, partagée dans son milieu par un sillon, qui occupe une grande partie du fond de la valve. On n'a pas encore pu bien observer les impressions musculaires de la grande valve ; elles sont au nombre de quatre principales à peine visibles et que M. Sandberger a attribuées au muscle adducteur, mais que, afin de les interpréter d'une manière analogue aux observations faites sur d'autres genres, nous rapporterons en partie au muscle adducteur et en partie au muscle cardinal ou divaricateur de M. Hancock ; les deux plus petites situées de chaque côté du sillon médian appartiendraient au premier et la troisième un peu plus grande que les deux autres, serait produite par le dernier, dont l'autre extrémité aurait été fixée à l'apophyse cardinale de la petite valve. Ni l'une, ni l'autre valve n'ont offert des traces de l'impression produite par le muscle pédiculaire. Des recherches ultérieures seront nécessaires, afin de déterminer d'une manière précise, le point d'attache des appendices spiraux.

Le genre *Davidsonia* a été créé par M. Bouchard en faveur de quelques coquilles de la forme des *Leptæna*, mais qui possèdent la faculté de s'attacher par une partie plus ou moins grande de leur valve ventrale, aux corps sous-marins avec lesquels elles ont vécu. Leur forme est transverse-ovale; leurs valves sont inégalement épaisses; leur area est droite et divisée par une fente

entièrement recouverte d'un pseudo-deltidium convexe. A l'intérieur de la valve ventrale ou adhérente, au-dessous et entre les extrémités des dents, on remarque les impressions du muscle adducteur (Pl. I, fig. 34, A), sur les côtés desquelles se trouvent les impressions plus grandes des muscles cardinaux (Ibid. R). On aperçoit facilement sur la petite valve, le bourrelet qui reçoit les fossettes cardinales, entre lesquelles se trouve une petite apophyse médiane servant de point d'attache aux muscles cardinaux (Pl. I, fig. 33, J.). En dessous de cette apophyse se trouve la quadruple impression du muscle adducteur (Ibid. A), de sorte que les deux séries de muscles destinés à ouvrir et à fermer les valves, sont ici au complet.

On n'a pu encore observer de trace d'impressions des muscles ajusteurs, qui ont pu exister ou ne pas exister chez des espèces non perforées à ligne cardinale droite ; néanmoins j'en ai trouvé les empreintes sur les espèces de *Strophomena* munies d'une ouverture servant de passage au pédoncule, sur le *S. analoga*, etc. Le caractère le plus important des *Davidsonia*, consiste dans la présence à l'intérieur de la valve ventrale, de deux élévations coniques, plus ou moins fortement prononcées, dont les parties latérales et frontales laissent voir les traces de 5 ou 6 sillons sémicirculaires ou spiraux ; ces sillons sont tous de longueur différente et ils sont d'autant plus courts qu'ils se rapprochent d'avantage du sommet des cônes (Pl. I, fig. 34). M. de Koninck, à qui l'on doit la découverte de la petite valve, y a observé deux fossettes coniques, correspondant aux cônes de la valve adhérente et séparées l'une de l'autre par une arête arrondie (Pl. I, fig. 33). L'usage de ces cônes a été diversément interprété, mais l'opinion la plus probable consiste à admettre qu'ils sont le résultat de la secrétion du manteau, lequel leur a transmis en quelque sorte les impressions des tours de spire qui le comprimaient lui-même.

J'ai exprimé cette opinion dans les éditions anglaise, française et allemande de mon Introduction générale sur les Brachiopodes ; mais alors je supposais que les bras spiraux étaient libres comme chez les *Productus*, les *Strophomena ;* etc. Depuis lors, M. de Koninck a découvert chez les *Davidsonia* deux lamelles spirales, fixées aux bords cardinaux de la petite valve, formant quelques tours verticaux et ayant de la ressemblance avec ceux que l'on observe chez les *Atrypa ;* seulement ils ne sont pas aussi

fortement comprimés l'un contre l'autre comme chez ces derniers.

Tel est l'état de nos connaissances relativement aux bras spiraux et leur support calcareux. Malgré le grand nombre de découvertes concernant cette partie, il restera encore beaucoup à faire, avant de pouvoir donner des restaurations complètes de l'intérieur d'un certain nombre de sous-genres et d'espèces dont on a proposé l'admission; mais je suis convaincu qu'il ne se passera pas un temps bien long avant que l'on ne soit en possession des matériaux qui nous manquent; il est impossible que les efforts tentés par un grand nombre de paléontologistes dont le zèle égale le savoir, ne parviennent à compléter l'histoire d'une classe d'animaux qui sous tous les rapports excite le plus vif intérêt.

Je termine cette notice par la liste de tous les Brachiopodes carbonifères anglais, munis d'appareils spiraux, destinés au support des bras buccaux. J'ai consacré à ces recherches, la plus grande partie de mon temps pendant ces deux dernières années et je suis arrivé à ce résultat, que les 125 espèces environ, que l'on croyait se trouver dans les couches carbonifères des Iles britanniques, se réduisent à 42 ou 43 seulement. Tout le reste se compose d'espèces dont l'existence n'a pas été positivement reconnue chez nous, ou d'espèces carbonifères qui ont été confondues avec des espèces dévoniennes ou rapportées à d'autres genres qu'à ceux auxquels elles appartenaient (1). Parmi ces 43 espèces même, il s'en trouve quelques unes qui exigent des recherches ultérieures, afin de décider, si elles ne sont pas des variétés d'espèces antérieurement décrites. Il est donc probable, qu'il résultera de cet examen, que le nombre ci-dessus indiqué devra encore être réduit, par suite de la suppression de quelques unes de ces espèces et de leur réduction au rang de simple variété.

Certains naturalistes et géologues ont lancé des reproches souvent mérités contre les fabricants d'espèces (species-makers) et je serai le dernier à nier que cet abus de la nomenclature n'ait pas apporté un grand obstacle à l'avancement de la science; mais il me sera également permis de faire observer, que les difficultés que l'on rencontre à différentier les caractères et à

(1) On en trouve la liste dans ma Monographie des Brachiopodes carbonifères de l'Angleterre, publiée par la Société Paléontographique.

déterminer les limites réelles d'une espèce, sont beaucoup plus grandes, que ne peuvent se l'imaginer les personnes qui ne sont pas familiarisées avec le sujet, ou d'autres qui, par suite de circonstances locales ont été assez heureuses pour découvrir certains passages de formes qui servent à confondre une ou plusieurs soi-disant espèces, dans une espèce unique et déjà connue. J'applaudis aux efforts de ces personnes et je suis toujours heureux de rectifier les erreurs que j'ai pu commettre, n'ayant d'autre but que l'avancement de la science à laquelle j'ai consacré environ 25 années de mon existence.

Les espèces carbonifères des Iles britanniques, se rapportant aux genres *Spirifera*, *Spiriferina*, *Cyrtina*, *Athyris* et *Retzia* actuellement connues, peuvent-être provisoirement classées dans l'ordre suivant :

1. SPIRIFERA STRIATA, Martin, sp. Petr. Derb. tab. XXIII. 1809; Dav. Brit. foss. Brach., part V, pl. 2, fig. 12-21; pl. 3, fig. 2-6 — *T. spirifera*, Lamk. — *attenuata*, J. de C. Sow. — *princeps* et *clathrata*, M'Coy. Cette espèce doit être considérée comme le type du genre.

2. — MOSQUENSIS, Fischer de Waldh., Progr. sur le Choristite. p. 8, N° 1, 1825; Dav. pl. IV, fig. 13, 14 et pl. XII, fig. 16. — *Sowerbyi* et *Kleinii*, Fischer; — *incisa*, Goldfuss, — *choristites*, v. Buch.; — *priscus*, Eichwald. Cette espèce est plus rare que la précédente et se trouve principalement en Irlande.

3. — HUMEROSA, Phillips, Geol. of Yorks., vol. II, pl. XI, fig. 8, 1836; Dav. pl. IV, fig. 15, 16.

4. — DUPLICICOSTA, Phillips. Geol. of Yorks., vol. II, pl. X, fig. 1, 1836; Dav. pl. III. fig. 7-10 et pl. IV, fig. 3, 5-11; — *fasciger*, Keyserling; — *fasciculata*, M'Coy.

N. B. Toutes ces espèces ont beaucoup de rapports entre elles.

? 5. — CRASSA. DE KONINCK, Anim. foss. de la Belg., pl. XV^bis, fig. 5, 1843; Dav. pl. VI, fig. 20-22, pl. VII, fig. 1-3; — *planicostata*, M'Coy. Quelques auteurs regardent cette espèce comme synonyme du *Sp. duplicicosta*, d'autres la confondent avec le *Sp. bisulcata* et il est certain qu'elle possède quelquefois beaucoup de ressemblance tantôt avec l'une et tantôt avec l'autre; toutefois par divers motifs, j'ai préféré la conserver comme espèce distincte.

Il est à désirer que l'on puisse rassembler un plus grand nombre d'échantillons que celui dont j'ai pu disposer, afin de déterminer les véritables caractères de cette espèce.

6. — PLANATA, Phillips, Geol. of Yorks., vol. II, pl. X, fig. 3, 1836, Dav. pl. VII, fig. 25-36. Parait être une bonne espèce et facile à distinguer.

? 7. — FUSIFORMIS, Phillips, pl. IX, fig. 10 et 11; Dav. pl. XIII, fig. 15. Un seul échantillon imparfait de cette espèce semble avoir été rencontré jusqu'ici; il se trouve dans la collection du British Muséum; ses caractères et sa valeur spécifiques ne peuvent donc pas être considérés comme définitivement établis; il est à désirer qu'on en obtienne d'autres exemplaires.

8. — TRIANGULARIS, Martin, sp. Petrif. Derbiens., pl. XXXVI, fig. 2, 1809; Dav. pl. V, fig. 16-24. — *Ornythoryncha*, M'Coy.

9. — TRIGONALIS, Martin, sp. Petrif. Derb., pl. XXXVI, fig. 1, 1809; Dav. pl. V. fig. 25-34.

10. — BISULCATA, Sow. Min. Conch. pl. CCCCXCIV, fig. 1, 2, 1825; Dav. pl. V, fig. 1; pl. VI, fig. 1-19 et pl. VII, fig. 4; — *semi-circularis*, Phillips; — *calcarata*, M'Coy; — *transiens* M'Coy.

11. — CONVOLUTA, Phillips. Geol. of Yorks. t. II, pl. IX, fig. 7, 1836, Dav. pl. V, fig. 2-15 — (?) *rhomboïdea*, Phillips. J'ai quelques doutes relativement à cette espèce et celle que j'y rapporte comme synonyme; je n'ai pu étudier que trois ou quatre échantillons de l'espèce type et il est à désirer que l'on puisse vérifier si l'espèce de Phillips n'est pas une variété très-transverse, produite par des conditions exceptionnelles du *Sp. bisulcata* Sow. (1).

12. — GRANDICOSTATA. M'Coy, Brit. pal. foss., pl. III, D, fig. 29, 1855, Dav. pl. V, fig. 38, 39 et pl. VII, fig. 7-16.

N. B. Toutes ces formes se rapprochent les unes des autres.

---

(1) Je crois à cet égard pouvoir donner pleine satisfaction à mon savant ami et lui prouver par les figures de la pl. II de ce Mémoire, que le *Sp. convolutus* est une des meilleures espèces du genre et qu'il n'a aucun rapport avec le *Sp. bisulcatus*.

L. DE KON.

13. — LAMINOSA, M'Coy, Syn. Carb. foss. of Ireland, pl. XXI, fig. 4, 1844; Dav. pl. VII, fig. 17-22 — *tricornis*, de Koninck. Cette espèce paraît être très-bonne, mais on la trouve rarement en bon état en Angleterre et en Irlande (1).

14. — CUSPIDATA, Martin, sp. Trans. Linn. soc., pl. III, fig. 1-6, 1796 : Dav. pl. VIII, fig. 19-24 et pl. IX, fig. 1 et 2; — *simplex*, M'Coy, non Phillips.

15. — DISTANS, Sow. M. C. pl. 494, fig. 3, 1825; Dav. pl. VIII, fig. 1-17. Je n'ai jamais rencontré un échantillon sur lequel le pseudodeltidium était parfaitement conservé, mais il résulte de l'inspection d'un moule interne provenant de la dolomie carbonifère de Breedon, que le pseudodeltidium du *S. cuspidata* a été creusé d'une ouverture circulaire, semblable à celle que l'on observe chez les *Cyrtia* de Dalman; il est donc probable que cette espèce et la précédente appartiennent à la division de cet auteur (2).

16. — MESOGONIA, M'Coy. Synopsis, pl. XXII, fig. 13, 1844; Dav. pl. VII, fig. 24. M. de Koninck assure que c'est une bonne espèce, mais je n'ai jamais eu l'occasion de l'étudier en nature.

N. B.—Les *Sp. bicarinata*, M'Coy, Synopsis pl. XXII, fig. 10; *decemcostata*, M'Coy, ibid., fig. 9, et *sub-conica*, Martin, Petrif. Derb. pl. XLVII, fig. 6-8, 1809, sont des espèces très-douteuses et qui exigent des nouvelles recherches pour être admises (3).

17. — REEDII, Dav. pl. V, fig. 40-47, 1857.

18. — TRIRADIALIS, Phill. Geol. of Yorks., vol. II, pl. 10, fig. 7, 1836; Dav. pl. IX, fig. 4-12 — *trisulcosa* et *sexradialis*, Phillips.

19. — PINGUIS, Sow., Min. Conch., pl. CCLXXI, 1820; Dav. pl. X, fig. 1-12, — *rotundata*, Sow. (non Martin) — *subrotundata*, M'Coy. J'aurais préféré adopter le nom de *rotundata* que Sowerby a donné à cette

---

(1) C'est cette circonstance qui ne m'a pas permis de reconnaître dans une mauvaise figure qu'en a donnée M'Coy, l'espèce parfaitement intacte de Tournay et qui me l'a fait décrire sous un nouveau nom.

L. D. KON.

(2) Voir ma note à la fin du mémoire. L. D. KON.

(3) L'inspection de l'échantillon figuré par l'auteur m'a prouvé que le *Sp. bicarinatus* est identique avec mon *Sp. Roemerianus*, dont il devient synonyme et le *Sp. sub-conicus*, me paraît être le jeune âge du *Sp. cuspidatus*. Je ne possède aucune donnée relativement au *Sp. decemcostatus*.

L. D. KON.

espèce, mais comme il a été appliqué à une autre, j'ai été obligé de conserver celui de *pinguis*. La forme désignée sous le nom de *rotundatus* est la forme normale de l'espèce; celle plus particulièrement connue sous le nom de *pinguis*, est composée de coquilles qui ont été arrêtées dans leur développement ou qui ne sont que des monstruosités.

20. — OVALIS, Phillips. Geol. of Yorks., vol. II, pl. X, fig. 5, 1836; Dav. pl. IX, fig. 20-26, — *exarata*, Fleming (?) — *hemisphœrica*, M'Coy.

21. — INTEGRICOSTA, Phillips. Geol. of Yorks., vol. II, pl. X, fig. 2, 1836; Dav. pl. IX, fig. 13-19? — *rotundata*, Martin? — *paucicostata*? M'Coy.

N. B. Les espèces qui composent ce petit groupe, ont toutes beaucoup de rapports entre elles, et il est quelquefois fort difficile de distinguer les unes des autres, certaines variétés des trois dernières, bien que la généralité des échantillons semblent différer passablement entre eux.

22. — RHOMBOÏDALIS, M'Coy, Synopsis, pl. XXII, fig. 11, 1844, Dav. pl. XII, fig. 6 et 7.

23. — GLABRA, Martin, Petrif. Derb., pl. XLVIII, fig. 9 et 10, 1809; Dav. pl. XI, fig. 1-9 et pl. XII, fig. 1-5; — *obtusa* et *oblata*, Sow. — *linguifera*, *symmetrica* et *decora*, Phillips. Le nombre des variétés de cette espèce vont à l'infini, de sorte que l'on peut à peine trouver un seul caractère distinctif permanent.

24. — URII, Fleming. Brit. animals, p. 376, 1828; Dav. pl. XII, fig. 13, 14.

25. — CARLUKIENSIS, Dav., pl. XIII, fig. 14, 1857.

26. — LINEATA, Martin. Petrif. Derb., pl. XXXVI, fig. 3, 1809; Dav. pl. XIII, fig. 1-13. — *imbricata*, Sow. — *reticulata*, M'Coy; — *elliptica* et *mesoloba*, Phillips. Certains auteurs admettent les *Sp. elliptica* et *lineata* comme espèces distinctes.

7. SPIRIFERINA CRISTATA, Schlotheim, sp. var. *octoplicata*, Sow. Min. Conch., pl. CCCCCLXII, fig. 2-4, 1827; Dav. pl. VII, fig. 37-47 (1).

28. ? INSCULPTA, Phillips. Geol. of Yorks.; vol. II, pl. IX, fig 2 et 3, 1836; Dav., pl. VII, fig. 48-55; —

(1) En comparant avec soin l'espèce permienne, créée par Schlotheim sous le nom de *Terebratulites cristatus*, avec les nombreux échantillons du *Spirifer octoplicatus* recueillis à Visé, je suis arrivé à me convaincre, que, con-

crispa, de Koninck, non Linnœus ; — *quinqueloba*, M'Coy (2).

? 29. ? minima, Sow. Min. Conch., pl. CCCLXXVII, fig. 1, 1822 ; Dav. pl. VII, fig. 56-59. Je n'ai jamais vu d'autres échantillons de cette espèce, que les deux que possède M. Sowerby et je la considère comme douteuse, aussi bien que le *Sp. partita* de Portlock. Cette dernière devra probablement être reléguée parmi les synonymes de l'une ou de l'autre des espèces précédentes.

30. Cyrtina septosa, Phillips sp., Geol. of Yorks., vol. II, pl. XI, fig. 7, 1836 ; Dav. pl. XIV, fig. 1-10 et pl. XV fig. 1 et 2. C'est une espèce très-intéressante, mais qui se trouve rarement avec les deux valves réunies. Parmi un grand nombre de fragments de cette espèce que j'ai reçus de M. Burrow, de Settle, en Yorkshire, j'ai été charmé de rencontrer le moule interne de la valve dorsale, dont la structure n'était encore qu'imparfaitement connue jusqu'ici. Ce moule m'a démontré que les impressions musculaires de cette valve sont exactement semblables à celles des *Spirifera*, et qu'elle est dépourvue de cloisons. Il en résulte que le *C. septosa* ne peut pas être classé parmi les *Pentamerus*. Néanmoins je n'ai trouvé dans aucun des fragements la moindre trace de spire, ce qui n'implique pas nécessairement qu'il en fut dépourvu.

---

trairement à l'opinion émise par moi en 1842, et partagée encore aujourd'hui par l'auteur de ce Mémoire, ces fossiles appartiennent à deux espèces bien distinctes. Ainsi, le *Sp. cristata* n'atteint jamais la taille du *Sp. octoplicata* et sa fore est toujours plus globuleuse que celle de ce dernier ; en outre, son sinus est simple et le fond est terminé par une surface plane, tandis que celui de l'espèce carbonifère est anguleux et souvent plissé, comme l'indiquent fort bien les figures de Sowerby ; il en est de même du bourrelet correspondant. Enfin, les plis latéraux sont toujours simples chez le premier, et leur nombre ne s'élève jamais audelà de 5 pour chaque côté, tandis qu'ils sont souvent bifurqués chez le second et au nombre de 6 ou 7 chez les individus adultes.

L. de Kon.

(2) Il résulte de l'examen d'échantillons bien conservés de Tournay, que le test de cette espèce est perforé et qu'elle appartient réellement au genre *Spiriferina*, quoique par la forme de son pseudeltidium elle se rapproche de la *Cyrtina heteroclyta*, avec laquelle je l'ai confondue à tort en 1851.

L. de Kon.

31. — DORSATA, M'Coy. Synopsis, pl. XXII, fig. 14. 1844; Dav. pl. XV, fig. 3 et 4. Je place cette espèce parmi les incertaines; il n'en a encore été trouvé que deux ou trois échantillons imparfaits.

32. — CARBONARIA, M'Coy Brit. palœozoïc fossils, pl. III, D, fig. 12-18, 1855; Dav. pl. XV, fig. 5-14.

33. ATHYRIS PLANOSULCATA, Phillips. Geol. of Yorks., vol. II, pl. X, fig. 15; Dav., pl. XVI, fig. 2-13 et fig. 15. — *oblonga*, Sow. — *paradoxa* et *obtusa*, M'Coy.

34. — LAMELLOSA, Leveillé. Mém. de la Soc. Géol. de France, vol. II, pl. II, fig. 21-23, 1835; Dav. pl. XVI, fig. 1 et pl. XVII, fig. 5 et 6. — *squamosa*, Phillips.

35. — EXPANSA, Phillips. Geol. of Yorks., vol. II, p. 220, pl. X, fig. 18; Dav. pl. XVI, fig. 14, 16 et 18 et pl. XVII, fig. 1 — 5.

36. — ROYSSII, Leveillé. Mém. de la Soc. Géol. de France, vol. II, pl. II, fig. 18-20, 1835; — *fimbriata* et *glabristria*, Phill. — *depressa*, M'Coy.

37. — GLOBULARIS, Phillips. Geol. of Yorks., vol. II, pl. X, fig. 22, 1836.

38. — SUBTILITA, J. Hall, dans Howard Stansbury's exploration and survey of the valley of the great salt Lake of Utah, pl. IV. fig. 1 a 6 et fig. 2 a, b, 1852; Dav. pl. XV, fig. 21 et 22.

39. — AMBIGUA, Sow. Min. Conch., pl. CCCLXXVI, 1822; — *sublobata*, Portlock; — *pentaëdra*, Phillips.

40. — SQUAMIGERA, De Koninck, Descr. des an. foss. carb. de Belg., Suppl. pl. LVI, fig. 9 *a* et 9 *b*. 1851.

41. ATHYRIS? GREGARIA, M'Coy, Synopsis, pl. XXII, fig. 18; Dav. pl. XV, fig. 27 et 28. Je n'ai jamais eu l'occasion d'étudier un échantillon parfait de cette coquille, et j'ai des doutes sur le genre auquel il faut la rapporter.

42. RETZIA RADIALIS, Phillips, sp., Geol. of Yorksh., vol. II, pl. XII, fig. 40 et 41, 1836. — *Mantiœ*, de Kon. non Sow.

43. — ULOTRIX, De Koninck, Descr. des anim. foss. carb. de Belg., pl. XIX, fig. 5. 1843; Dav. pl. XVII, fig. 18 et 19.

On trouvera dans les diverses parties de mon ouvrage sur les Brachiopodes carbonifères, qui ont été publiées par la Société Paléontographique en 1856, 1857 et 1858, la description et les figures de toutes ces espèces et de leurs variétés; mais comme il me faudra encore deux ou trois ans pour compléter cette monographie, à cause du grand nombre de planches qu'elle exige, je serai très-reconnaissant envers toutes les personnes qui voudront bien m'aider dans mon travail, soit en me communiquant les observations qu'elles auront pu faire, soit en me prêtant les matériaux qu'elles auront à leur disposition. Je désire en outre, qu'il soit bien entendu que je ne puis pas recommander l'emploi des termes *Athyris* et *Atrypa* dont j'ai fait usage dans ce Mémoire. Je m'en suis servi comme de simples noms sans signification, à cause de leur priorité. Néanmoins comme la généralité des naturalistes du continent et quelques auteurs anglais ont depuis quelque temps manifesté leur intention d'abandonner les noms impropres de M'Coy et de Dalman, à cause de la contradiction zoologique qu'ils expriment, mes lecteurs peuvent leur substituer ceux de *Spirigera* au lieu d'*Athyris* et de *Spirigerina* au lieu d'*Atrypa*, ainsi que l'a proposé d'Orbigny, quoique d'autres dénominations eussent été préférables.

Liste des Brachiopodes carbonifères de Belgique, munis d'une spire, et des localités dans lesquelles ils se trouvent,

Par L. DE KONINCK.

1. SPIRIFER STRIATUS, Martin, 1809, Petrif. Derb., pl. XXIII, fig. 1 et 2; de Kon. pl. XV^{bis} fig. 4, *a*, *b*, (1). — *Condor.* d'Orb. — *triplicatus*, Hall. Pauquys près Dinant (2), Chokier. Très-rare dans cette dernière localité.
2. — MOSQUENSIS. G. Fischer. 1825. Programme sur la Choristite; — *Sowerbyi* Fischer et de Kon., non Defr.; — *crassus.* Davidson, non de Kon., pl. VII, fig. 1, 2, 3; de Kon. pl. XVI, fig. 1, *a*, *b*, *c*. Tournay, Soignies, Feluy, les Ecaussinnes, Ath, Chanxe, Comblain-au-Pont, Pauquys (3), Wève, etc. Très-abondant.
3. — HUMEROSUS, Phillips. 1836. Geol. of Yorks., vol. II, pl. XI, fig. 8. Visé. Très-rare.
4. — DUPLICICOSTA, Phill. Loc. cit., pl. X, fig. 1; de Kon. pl. XVI, fig. 2, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*; — *recurvatus*, de Kon. Ibid. pl. XVI, fig. 5, Visé.
5. — PECTINOÏDES, De Kon. 1843. Descr. des anim. foss. pl. XVI, fig. 4. Visé.
6. — CRASSUS, De Kon. 1843. Pl. XV^{bis}, fig. 5; Dav. pl. VI, fig. 20-22, non pl. VII, fig. 1-3. Visé. Il ne serait pas impossible, comme l'a fait remarquer M. Davidson, que cette espèce fut à supprimer et que ce ne fut qu'une variété assez constante du *Sp. bisulcatus*, Sow.; mais je ne crois pas qu'elle puisse jamais être confondue avec le *Sp. duplicicosta*, Phill., dont elle ne possède jamais les côtes tranchantes et bifurquées.

---

(1) Pour la synonymie détaillée des espèces, voir la Monographie de M. Davidson et mon ouvrage intitulé : *Description des animaux fossiles du terrain carbonifère de Belgique.*

(2) C'est par erreur que j'ai indiqué cette espèce dans le calcaire de Visé, où elle n'a pas encore été trouvée.

(3) Je crois devoir remarquer que toutes les espèces du calcaire carbonifère des environs de Dinant, y ont été trouvées par M. l'avocat Dupont, qui par des recherches assidues, est parvenu à réunir une collection de plus de trois cents espèces de ce calcaire.

7. — BISULCATUS, Sow. 1825, Min. Conch. pl. 494, fig. 1 et 2; de Kon. pl. XIV, fig. 4 et pl. XVI, fig. 3. Visé, Très-abondant.

8. — GRANDICOSTATUS, M'Coy. 1855. Brit. pal. foss., pl. III, D, fig. 29. Ce n'est très-probablement qu'une variété à gros plis de l'espèce précédente, qui offre un grand nombre de modifications. Visé.

9. — ORNATUS, De Kon., 1851. Descr. des anim. foss. Suppl. pl. LVI, fig. 3. Visé. Très-rare.

10. — TRIGONALIS, Martin. 1809. Petrif. Derb., pl. XXXVI, fig. 1; de Kon., pl. XVII, fig. 1. Visé. Je doute fort que l'échantillon figuré par M. Davidson, pl. V, fig. 29-32 appartienne à cette espèce.

11. — FISCHERIANUS, De Kon. 1843. Anim. foss. pl. XIV, fig. 3. Visé.

12. — CONVOLUTUS, Phill. 1836. Geol. of Yorks., vol. II, pl. IX, fig. 7-9; de Kon. pl. XVII, fig. 2. Visé, Pauquys, près Dinant. C'est une excellente espèce et facile à distingner. (Voir pl. II de cette notice).

13. — ACUTICOSTATUS, De Kon. 1843. Desc. des anim. foss. pl. XVII, fig. 6. Visé. Rare.

14. — TRIANGULARIS, Martin. 1809. Petrif. Derb. pl. XXXVI, fig. 2; de Kon. pl. XV, fig. 1. Visé. Rare.

15. — ROEMERIANUS, De Kon. 1843. Descrip. des anim. foss. pl. XV, fig. 2. — *bicarinatus*, M'Coy. Tournay, Pauquys.

16. — MESOGONIUS, M'Coy. 1844. Syn. of the carb. foss. of Irel., pl. XXII, fig. 10. Chokier. Rare.

17. — LAMINOSUS, M'Coy, 1844. Loc. cit. pl. XXI, fig. 4, — *hystericus*, de Kon. 1843. Descr. des an. foss. pl. XV, fig. 3, non Schloth. — *tricornis*, Ibid. Suppl. p. 657. 1851. Feluy, Ecaussinnes, Comblain-au-Pont, Pauquys, Ath, etc. Assez abondant.

18. — SCHNURIANUS, De Kon. 1851. Descr. des anim. foss. *Suppl.* pl. LVI, fig. 6. Visé. Rare.

19. — DISTANS, Sow. 1825. Min. Conch. pl. CCCCXCIV, fig. 3. — *cuspidatus*, de Kon. Descr. des anim. foss. pl. XIV, fig. 1, non Martin. Tournay, Feluy, Comblain-au-Pont, Pauquys près Dinant. Rare.

20. — CUSPIDATUS, Martin. 1796. Trans. of the Linn. Soc. pl. III, fig. 1-6. Pauquys, près Dinant. Le *Sp. subconicus*, Martin, n'est probablement que le jeune âge de cette espèce. Rare.

21. — PINGUIS, Sow. 1820. Min. Conch. pl. CCLXXI, de Kon. Descr. des anim. foss. *Suppl.*, pl. LVI, fig. 5. Tournay, Pauquys près Dinant.

22. — OVALIS, Phill. 1836. Geol. of Yorksh., vol. II, pl. X, fig. 2; — *rotundatus*, de Kon., pl. XV, fig. 4, non Sow. Visé.

23. — PLANATUS, Phill. 1836. Geol. of Yorks., vol. II, pl. X, fig. 3. de Kon. Descr. des anim. foss. carb. pl. XVII, fig. 4 (fig. 3 excl.). Visé. Assez rare.

24. — INTEGRICOSTA, Phill. 1836. Geol. of Yorks., vol. II. pl. X, fig. 2. — *rotundatus*, de Kon. Desc. des anim. foss. carb., pl. XIV, fig. 2. Visé.

25. — VENTRICOSUS, De Kon. 1859. — *rotundatus*, var. non Sow. Descr. des anim. foss. pl. XVII, fig. 3. Visé. Rare.

26. — TRIRADIALIS, Phill. 1836. Geol. of Yorks., vol. II, pl. X, fig. 7; de Kon. Descript. des anim. foss., pl. XVII, fig. 5 et 7. Visé. Rare.

27. — RHOMBOÏDALIS, M'Coy. 1844. Syn. of the carb. foss. of Irel., pl. XII, fig. 11. Pauquys près Dinant. Très-rare.

28. — LINEATUS, Martin. 1809. Petrif. Derb., pl. XXXVI, fig. 3. — *sublamellosus*. De Kon. Descr. des anim. carb. pl. VI, fig. 3, pl. XVII, fig. 8 et pl. XVIII, fig. 2. Visé, Tournay, Pauquys, etc. Très-abondant.

29. — URII, Flem. 1828. Brit. anim., p. 376, — *Goldfussianus*, de Kon. 1851. Desc. des anim. carb., *Suppl.* pl. LVI. fig. 7. Tournay et Pauquys. Rare.

30. — GLABER, Martin. 1809. Petrif. Derb., pl. XLVIII, fig. 9 et 10; de Kon. Descr. des foss. carb., pl. XVIII, fig. 1. Visé. Très-abondant.

31. — GLABERRIMUS, De Kon. 1859. Tournay. Très-rare.

32. — ? CHEIROPTERYX, De Vern. et d'Arch. 1842. Geol. Trans. vol. VI, part. II, pl. XXV, fig. 6. De Kon. Descr. des anim. foss. pl. XV, fig. 9. Visé. Rare.

33. SPIRIFERINA BRONNIANA, De Kon, 1843. Desc. d. anim. foss. pl. XV, fig. 6. Visé. Cette espèce est remarquable par le tube calcaire qui traverse l'ouverture deltoïde de l'area et qui probablement à servi d'enveloppe au pedoncule de l'animal.

34. — OCTOPLICATA, Sow. 1827. Min. Conch., pl. CCCCCLXII, fig. 2-4. — *cristata*, de Kon. et Dav., non Schloth. de Kon. Descript. des anim. foss., pl. XV, fig. 3. Visé.

35.	— INSCULPTA,	Phill. 1836. Geol. of Yorks., vol. II, pl. IX, fig. 2, 3. *crispa*, de Kon. non Linn. et *heteroclyta*, id., non Defr. — *Koninckiana* d'Orb.; de Kon., Desc. des anim. foss. pl. XV, fig. 7. Pl. XV^{bis} fig. 2, et pl. XVII, fig. 3. Visé, Tournay, Pauquys. Assez rare.
36.	CYRTINA SEPTOSA,	Phill. 1836. Geol. of Yorks., vol. II, pl. XI, fig. 7: — *subconica*, de Kon. non Martin. de Kon. Descr. des anim. foss. pl. XII^{bis} fig. 3. Visé. Très-rare.
37.	ATHYRIS PLANOSULCATA,	Phill. 1836. Geol. of Yorks., vol. II, pl X, fig. 15; de Kon. Descr. d. anim. foss., pl. XXI, fig. 1, *e*, *f*, *i* et fig. 2. Visé, commun et Tournay, rare.
38.	— LAMELLOSA,	Leveillé. 1835. Mém. de la Soc. Géol. de France, vol. II, pl. II, fig. 21-23; de Kon. Descr. d. anim. foss., pl. XX, fig. 5. Visé et Tournay. Très-rare.
39.	— ROYSSII,	Leveillé. 1855. Mém. de la Soc. Géol. de France, vol. II, pl. II, fig. 18-20; de Kon. Descr. des anim. foss., pl. XXI, fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *g*, *h*. Tournay. Pauquys, etc. Commun.
40.	— SQUAMIGERA,	De Kon. 1851. Descript. d. anim. foss. Suppl., pl. LVI, fig. 9. Tournay. Rare.
41.	— GLOBULARIS,	Phill. 1836. Geol. of Yorks., vol. II, pl. X, fig. 22. Visé.
42.	— SUBTILITA,	Hall. 1852. Howard Stansbury's Explor. and survey on the valley of the great salt Lake of Utah, pl. IV, fig. 1 et 2. — *Royssii*, var. de Kon., non Leveillé, de Kon. Descr. d. foss. carb. pl. XX, fig. 1. Tournay.
43.	— AMBIGUA,	Sow. 1823. Min. Conch., pl. CCCLV; de Kon. Descr. des anim. foss., pl. XX, fig. 2. Visé.
44.	RETZIA SERPENTINA,	De Kon. 1843. Descr. des anim. foss., pl. XIX, fig. 8, Tournay. Très-rare.
45.	— RADIALIS,	Phill. 1836. Geol. of Yorks., vol. II, pl. XII, fig. 40 et 41; de Kon. Descrip. des anim. foss., pl. XIX, fig. 4. Visé et Tournay. Rare.
46.	— ULOTRIX,	De Kon. 1843. Descript. des anim. foss., pl. XIX, fig. 5. Tournay. Très-rare.

En comparant cette liste, à celle des espèces britanniques fournie par M. Davidson, on remarquera que les espèces suivantes y font défaut, à savoir : *Spirifer fusiformis*, *Reedii*,

et *Carlukiensis; Spiriferina minima; Cyrtina dorsata* et *carbonaria* et *Athyris expansa* et *gregaria*, en tout 8 espèces ; que les 3 Spirifer qui manquent en Belgique y sont remplacés par 8 espèces qui n'ont pas encore été trouvées en Angleterre et qui sont les *Sp. pectinoïdes*, *ornatus*, *Fischerianus*, *acuticostatus*, *Schnurianus*, *ventricosus*, *glaberrimus* et *Cheiropteryx;* que la *Spiriferina Bronniana* remplace en Belgique *la Sp. minima;* qu'il ne s'est pas encore trouvé de trace de *Cyrtina dorsata* et *carbonaria*, ni d'*Athyris gregaria* et *expansa* dans le terrain carbonifère belge, mais qu'en revanche, on y a rencontré la *Retzia serpentina*, qui n'a pas encore été signalée dans les Iles britanniques.

En résumé, au lieu de 44 espèces connues dans les Iles britanniques (1), la Belgique en possède 46, c. a. d. 2 de plus. De ces 44 espèces, 36 sont communes à la Belgique et 8, dont la plupart sont douteuses selon M. Davidson, n'y ont pas encore été indiquées, mais y sont remplacées par 10 espèces inconnues jusqu'à ce jour en Angleterre.

En poursuivant cette comparaison plus loin, on s'apercevra que je n'ai pas conservé le groupement fait par M. Davidson, parcequ'il m'a paru que celui que j'ai suivi, était plus naturel, rassemblait davantage les espèces dont les caractères ont le plus de rapports et conservait mieux les gradations qui existent dans leurs caractères particuliers.

Je regrette que mon savant ami n'ait donné aucune indication sur la distribution des espèces qu'il a si bien décrites et figurées. Je crois néanmoins que des recherches bien faites, relativement à cet objet, offriraient de l'intérêt, et mériteraient qu'on s'y arrêtat.

Je vais exposer celles qui me sont particulières et qui sont le résultat d'observations faites non-seulement en Belgique, mais encore en France, en Allemagne, en Angleterre, en Ecosse et en Irlande, tous pays que j'ai visités pour la plupart à plusieurs reprises.

Dès mes premiers travaux relatifs à l'étude des animaux fossiles du terrain carbonifère, j'ai été frappé de la différence

(1) J'y comprends le *Sp. bicarinatus*, M'Coy, qui n'est autre que mon *Sp. Roemerianus* et que M. Davidson a relégué parmi les espèces douteuses.

qui existe entre la faune de certaines formations appartenant à ce terrain.

C'est ainsi que la faune du calcaire de Visé, qui est probablement la plus nombreuse qui soit connue, est loin d'être identique à celle du calcaire de Tournay, également très-riche en espèces, mais cependant inférieure en nombre à celle de Visé.

Afin de rechercher la cause de cette grande différence qui existait dans le dépôt d'êtres appartenant à la même époque géologique, je me suis livré à de nombreuses observations stratigraphiques; ces observations avaient pour but de constater la relation de ces deux calcaires. J'ai voulu savoir si l'un était inférieur ou supérieur à l'autre, ou si tous deux étaient parallèles et pouvaient être considérés comme appartenant au prolongement d'une seule et même bande, disloquée par les phénomènes géologiques qui ont succédé à son dépôt. J'ai bientôt été convaincu que les recherches à cet égard offriraient de grandes difficultés et ne me conduiraient à aucun résultat positif, parce que le calcaire de Visé repose sur des assises appartenant aux couches moyennes du terrain dévonien, correspondant à celles du calcaire de Paffrath (1), et par conséquent en stratification discordante avec celles-ci, (ce qui n'a pu être constaté par des observations directes), tandis que la majeure partie du calcaire que je considère comme identique à celui de Tournay, se succède régulièrement aux assises dévoniennes supérieures à *Spirifer disjunctus* ou *Verneuilii*. Toutefois, une partie de ce dernier calcaire se trouve dans une position en tout point semblable à celle qu'occupe le calcaire de Visé (P. E. à Soignies). L'un comme l'autre est recouvert dans certains endroits, en stratification directe, de phtanite ou autre roches siliceuses (probablement les analogues du milstone-grit des géologues anglais) formant les assises inférieures du terrain houiller, dans d'autres, de roches crétacées dont les couches se prolongent sur celles de ce dernier terrain.

Rien donc, comme l'on voit, ne prouve que le calcaire de Visé est d'un âge différent de celui de Tournay, ainsi que je l'ai supposé pendant longtemps. Néanmoins je suis porté à

(1) La présence des fossiles ne laisse aucun doute à cet égard.

croire que le premier n'a et n'a jamais eu aucune communication directe avec le second et qu'il constitue en quelque sorte une île parfaitement distincte du reste du continent carbonifère qui l'avoisine, mais déposée à la même époque que lui (1).

Les observations que j'ai faites en Ecosse, en Angleterre et en Irlande, tendent à confirmer cette opinion, que je compte développer dans un travail ultérieur. En effet, dans le premier de ces pays, ainsi que dans l'Yorkshire, le calcaire dont la faune est identique à celle de Visé, possède les mêmes allures, repose sur les mêmes roches que celui du Glocestershire et de l'Irlande, considéré par moi comme l'analogue du calcaire de Tournay, dont il renferme les principales espèces fossiles. Dans la plupart de ces contrées, les calcaires ont pour base directe et concordante, des couches siliceuses d'une couleur variant du gris jaunâtre au rouge foncé et que la plupart des géologues Anglais et Irlandais rapportent au vieux grès rouge. Quelle que soit la valeur de cette opinion, il est de toute évidence pour moi, que ces grès font partie du terrain carbonifère, parce que rien n'indique qu'il est survenu entre leur dépôt et celui du calcaire à *Productus* etc., un de ces grands bouleversements qui caractérisent, soit la fin, soit le commencement d'une époque géologique bien définie.

La difficulté provient de ce que ces grès renferment rarement des fossiles et de ce que sur le continent ces roches ne se trouvent pour ainsi dire pas représentées. Ainsi, les calcaires carbonifères du bord de la Meuse, en amont de Namur et de Dinant, dont la puissance s'élève à plusieurs centaines de mètres, reposent sur des assises de silex presque pur, d'une couleur blanchâtre, grisâtre, ou noirâtre, exempt de fossiles et bien certainement l'analogue des grès de la pointe méridionale de l'Irlande et de la lisière méridionale de l'Ecosse. Une seule roche représente exactement au centre de l'Europe le grès rouge carbonifère britannique. Cette roche a fait le sujet de bien de discussions et d'observations de la part des géologues Belges, Français et Allemands. Elle est située sur nos frontières et connue sous le nom de poudingue ou grès de Malmédy. C'est un de ces exemples

(1) Cette opinion que j'ai communiqué depuis un certain temps déjà à Sir Roderick Murchison, a été insérée par cet éminent géologue, dans la 3me édition de son Siluria, p. 427.

servant à confondre les géologues exclusivement stratigraphes, qui tout en rejetant à priori la valeur des fossiles, seraient bien heureux d'en rencontrer quelques uns pour se mettre d'accord sur l'âge relatif de ce grès. Les uns l'ont rapporté au terrain permien, les autres au terrain triasique. J'en fais pour ma part du carbonifère inférieur.

Les principaux motifs qui m'ont déterminé à adopter cette opinion, consistent d'abord, dans l'analogie parfaite entre la composition, la couleur et la conformation de ce grès, avec celui de l'Ile d'Arran, et des autres parties de l'Ecosse méridionale; ensuite, dans la position de ce grès, qui, de même que celui de certaines localités Anglaises et surtout celui de Baggy-point, où il repose en stratification discordante sur des roches siluriennes, a pour assise, aux environs de Malmédy, ces mêmes roches, dont Dumont a fait son terrain Ardennais.

Ceci posé, je dirai qu'il résulte de mes observations, poursuivies pendant plusieurs années, que le calcaire de Visé n'a pas d'analogue en Belgique, que tous les autres massifs de calcaire de même âge, appartiennent à celui de Tournay. Tels sont ceux des environs de Namur, de Dinant, de Comblain-au-Pont, de Chokier, de Theux, de Feluy, des Ecaussinnes, d'Ath, de Soignies, etc. (1). En Allemagne, les roches carbonifères siliceuses de la Carinthie et de la Silésie sont les seules que je puisse considérer comme représentant le calcaire de Visé; les calcaires de Ratingen près Dusseldorf et de Hof, en Bavière, se rapportent à celui de Tournay, auquel j'assimile encore les massifs carbonifères de la France et de l'Espagne; tels que ceux de Sablé, de Juigné, de Pola de Lena (Asturies), etc. Il en est de même de la majeure partie du carbonifère de la Russie. Les calcaires qui se trouvent aux environs de Moscou, de Tula, de Kalouga et d'Archangel, etc., ainsi que celui de l'Altaï, sont identiques au calcaire de Tournay; le seul petit massif de Cosatchi-Datchi, situé au revers Oriental de l'Oural, représente le calcaire de Visé.

Tout le calcaire carbonifère de l'Irlande, surtout celui de

(1) J'ai cru pendant quelque temps que le massif calcaire de Chokier était identique à celui de Visé, mais des recherches plus précises faites sur de bons échantillons de fossiles, m'ont convaincu du contraire.

Hook-point, des environs de Dublin, d'Enniskillen, d'Armagh, si remarquables par le grand nombre de fossiles qu'ils renferment, appartient par sa faune au calcaire de Tournay, lequel a encore en Angleterre pour représentants, le calcaire des environs de Bristol, du Glocestershire et d'une partie de l'Yorkshire (Richmond), tandis que celui d'une autre partie de ce dernier Comté (Bolland), ainsi que celui de l'Ecosse, des pays de Galles, des environs de Manchester et de Newcastle sont semblables au calcaire de Visé. Ce coup d'œil jeté sur la distribution géographique des deux calcaires, fera mieux comprendre celle des principaux Brachiopodes faisant le sujet de ce Mémoire, qui y sont contenus et facilitera en même temps les recherches relatives à la faune générale de l'un et de l'autre de ces deux dépôts.

Ainsi, le *Spirifer striatus* se trouve en grande abondance en Irlande et principalement dans le calcaire de Millecent et de Ratheline, mais à l'extrémité méridionale et dans la partie septentrionale de l'île, ce Spirifer est remplacé par le *Sp. Mosquensis;* en Angleterre il est beaucoup plus rare et M. Davidson ne cite que quelques localités du Yorkshire (1) et du Derbyshire, tandis qu'il constate qu'on ne l'a pas encore rencontré en Ecosse, ainsi que j'ai eu occasion de l'observer de mon côté.

En Allemagne, je ne connais que le calcaire de Ratingen qui ait fourni cette espèce, encore inconnue en France et en Russie, où le *Sp. Mosquensis* est presque généralement prédominant. M. de Verneuil le cite dans une seule localité d'Espagne (Pas-en-Cavales); en Belgique, il n'est connu qu'aux environs de Dinant et principalement à Pauquys, d'où il m'a été communiqué par M. Dupont.

Partout où l'existence de ce Spirifer a pu être bien constatée, on a pu remarquer celle du *Sp. cuspidatus.* Le *Spirifer Mosquensis* est de toutes les espèces de ce genre, celle qui occupe la distribution géographique la plus étendue. C'est en quelque sorte l'espèce caractéristique du calcaire de Tournay et de ses analogues ; c'est une véritable *Leitmuschel*, qui sert à nous guider avec sûreté, dans la distinction de ces calcaires. Per-

(1) Je doute fort qu'il ait été trouvé à Bolland, ainsi que le pense M. Davidson. (V. Monogr. of Brit. carb. Brach. part. V, p. 21).

sonne n'ignore l'horizon immense que ce *Spirifer* occupe aux environs de Moscou et dans d'autres parties de la Russie. Elle se trouve également abondamment en Espagne et en Irlande, ainsi qu'en Belgique. Partout sa présence, semble exclure, non seulement celle des *Sp. striatus* (1) et *bisulcatus*, mais encore celle du *Sp. cuspidatus*, qui alors est remplacé par son analogue le *Sp. distans*. Le *Sp. humerosus* est une espèce encore rare et qui n'a été trouvée que dans deux localités en Angleterre (Greenhow-Hill et Wensleydale) dont le calcaire est identique à celui de Visé, d'où je l'ai également obtenue.

Les *Sp. crassus*, *bisulcatus et grandicostatus* sont des espèces très-voisines l'une de l'autre et appartiennent au calcaire de Visé; aussi ne les rencontre-t-on que dans quelques parties du centre de l'Angleterre, en Ecosse, à Cosatchi-Datchi (Oural), en Silésie et en Carinthie. La seconde est très-abondante et remplace dans ces diverses localités, le *Sp. Mosquensis* du calcaire de Tournay.

Les *Spirifer trigonalis*, *triangularis*, *ovalis*, *planatus*, *integricosta*, *triradialis* et *glaber*, qui sont des espèces propres au calcaire de Visé, n'ont encore été signalés que dans quelques localités d'Angleterre, d'Ecosse et d'Allemagne; tandis que les *Spirifer Roemerianus*, *laminosus*, *pinguis*, *rhomboïdalis* et *Urii* du calcaire de Tournay, ne sont connues que dans les Iles Britanniques et en Belgique.

Les *Sp. duplicicosta*, *convolutus*, *et lineatus*, sont les seules espèces dont j'ai pu constater positivement l'existence simultanée dans les deux calcaires; néanmoins les deux premiers sont assez rares et n'ont été indiqués qu'à Visé et à Pauquys, en Belgique, à Bolland et à Clitheroe, en Angleterre, et à Kildare, en Irlande; le dernier au contraire, est répandu dans le terrain carbonifère de tous les pays et forme l'une des espèces les plus abondantes de ce terrain; elle occupe certainement l'horizon géologique le plus étendu.

Les espèces de *Spirifer* non mentionnées ici, ne sont encore connues que dans une ou deux localités et par un petit nombre d'échantillons, en sorte qu'il n'y a aucune conclusion à tirer

(1) Cette exclusion n'est pas absolue; rien n'empêche que quelques échantillons de cette espèce ou d'autres se rencontrent avec le *Sp. mosquensis*. Mes observations ne portent que sur ce que j'ai pu constater le plus souvent.

de leur présence ou de leur absence dans l'un ou l'autre des deux calcaires.

Il est cependant utile de faire remarquer que le *Spirifer Cheiropterix* est jusqu'à présent le seul de ce genre dont la présence ait été constatée simultanément dans le calcaire carbonifère et dans le calcaire dévonien moyen.

Des quatre espèces de *Spiriferina* carbonifères connues, une est spéciale à l'Angleterre (*Sp. minima*), une autre à la Belgique (Sp. Bronniana); la troisième du calcaire de Visé (Sp. octoplicata) est commune à l'Angleterre et à la Belgique et la quatrième, (Sp. insculpta) qui se trouve simultanément dans les deux calcaires, est assez répandue, puisque sa présence a été constatée en Russie, en Allemagne, en Espagne, en Irlande, en Angleterre, en Ecosse et en Belgique.

La *Cyrtina septosa* est une espèce du calcaire de Visé; elle se trouve aussi dans le Derbyshire. Les deux autres espèces de ce genre ne sont connues qu'en Angleterre.

La distribution des *Athyris* est assez remarquable : les *A. planosulcata et lamellosa* sont les seules dont j'aie pu constater la présence simultanée dans les calcaires de Visé et de Tournay; la première est assez répandue; elle est indiquée en Irlande, en Ecosse, en Angleterre, en Russie et en Belgique; la seconde n'est connue qu'à Bolland dans l'Yoskshire, à Hook-Point, en Irlande, à Visé et à Tournay, où elle n'est pas rare. Les *A. Royssii, squamigera et subtilita* ne se trouvent que dans le calcaire de Tournay et ses analogues. La première surtout, est très-répandue dans ces calcaires. C'est une des espèces les plus constantes et les plus répandues; elle a souvent été confondue avec d'autres et surtout avec l'*A. planosulcata*. Les deux dernières sont plus rares, mais j'ai la conviction qu'on les rencontrera partout ou les recherches seront dirigées avec soin, dans les assises du calcaire auquel elles sont propres.

Les *A. globularis et ambigua* sont du calcaire de Visé, et se trouvent principalement en Ecosse et dans le centre de l'Angleterre. Elles ne sont guère connues que dans ces pays et en Belgique.

La *Retzia radialis* est répandue dans les deux calcaires, mais je ne l'ai encore observée que dans les Iles britanniques et en Belgique. Les *R. serpentina* et *ulotrix* sont du calcaire de Tournay. Je les ai trouvés en Irlande et en Belgique. Elles sont rares et peu connues.

J'ai groupé dans le tableau suivant, les espèces d'après le dépôt auquel elles appartiennent. La première colonne comprend les espèces du calcaire de Visé, la seconde celles du calcaire de Tournay ou de leurs analogues et la troisième celles qui sont communes aux deux calcaires.

ESPÈCES DU CALCAIRE DE VISÉ.	ESPÈCES DU CALCAIRE DE TOURNAY.	ESPÈCES COMMUNES AUX DEUX CALCAIRES.
1. Sp. humerosus.	1. Sp. striatus.	1. Sp. duplicicosta.
2. — pectinoïdes.	2. — mosquensis.	2. — convolutus.
3. — crassus.	3. — Roemerianus.	3. — lineatus.
4. — bisulcatus.	4. — mesogonius.	4. Spiriferina insculpta.
5. — grandicostatus.	5. — laminosus.	5. Athyris planosulcata.
6. — ornatus.	6. — distans.	6. — lamellosa.
7. — trigonalis	7. — cuspidatus.	7. Retzia radialis.
8. — Ficherianus.	8. — pinguis.	
9. — acuticostatus,	9. — rhomboïdalis.	
10. — triangularis.	10. — Urii.	
11. — Schnurianus.	11. — glaberrimus.	
12. — ovalis.	12. Spiriferina octoplicata.	
13. — planatus.	13. Athyris Royssii.	
14. — integricosta.	14. — squamigera.	
15. — ventricosus.	15. — subtilita.	
16. — triradialis.	16. Retzia serpentina.	
17. — glaber.	17. — ulotrix.	
18. — cheiropteryx.		
19. Spiriferina Bronniana.		
20. Cyrtina septosa.		
21. Athyris globularis.		
22. — ambigua.		

Ainsi, sur 46 espèces connues en Belgique, 22, ou environ la moitié ne se trouvent que dans le calcaire de Visé ; 17 espèces, ou un peu plus du tiers, sont propres au calcaire de Tournay ou à ses analogues, tandis que 7 seulement, ou les $^2/_{13}$ sont communes aux deux calcaires. Or, en constatant, ainsi que j'ai pu le faire, qu'une proportion semblable existe dans la distribution générale de la faune carbonifère, il me semble que ce fait mérite quelque attention, surtout parce qu'il n'est pas le résultat d'un phénomène local, mais bien d'une action qui a dû s'étendre par tout le globe pendant la période carbonifère, puisqu'il se représente en Angleterre, en Russie et en Allemagne, exactement sous les mêmes formes, sous lesquelles il s'est produit en Belgique.

Je terminerai ces notes par la description d'une nouvelle espèce de *Spirifer*, remarquable par la ponctuation de son test, et très-voisine du *Spirifer glaber* de Martin. Je lui donne le nom de

SPIRIFER GLABERRIMUS.

Pl. II, fig. 9-13.

Ce Spirifer est d'une taille médiocre, d'une forme transverse-ovale, déprimée, à surface lisse, d'un aspect velouté et mat, produit par la présence d'une quantité innombrable de petites granulations serrées, invisibles à l'œil nu, mais, qui à la loupe, se distinguent facilement. Elles sont d'une forme légèrement allongée (Pl. II, fig. 9, *a*). La coquille porte sur ses bords quelques stries concentriques d'accroissement.

La grande valve (fig. 10 et 12) est munie d'un sinus assez profond, à bords arrondis, se reliant insensiblement aux côtés de la coquille. Son area est bien prononcée (fig. 11), forme un triangle très-surbaissé, dont la base occupe à peu près les $^2/_3$ de la largeur totale de la coquille ; son ouverture deltoïde a la forme d'un triangle presque équilatéral ; le crochet n'est que faiblement recourbé.

La petite valve est beaucoup moins bombée que la grande ; son lobe médian est large, arrondi et peu prononcé (fig. 9.);

ses côtés ne sont que légèrement relevés ; son crochet est très-peu sensible.

Je ne connais pas la structure interne de ces valves.

Rapports et différences. Par tous ses caractères extérieurs, le *Sp. glaberrimus* a une si grande ressemblance avec certaines variétés de *Sp. glaber* du calcaire carbonifère d'Angleterre et d'Irlande, que je n'aurais pas hésité à l'identifier avec celles-ci, s'il n'avait pas eu le test ponctué, ce qui le distingue immédiatement de toutes ces variétés.

Il ne serait pas impossible que le *Spir. glaber* qui se trouve en si grande abondance dans les calcaires que je considère comme les analogues du calcaire de Visé, fût une espèce distincte de celle des calcaires de Tournay, dans lequel j'ai trouvé le *Sp. glaberrimus*, et que le caractère distinctif résidât dans la ponctuation du test. Ce point ne pourra être décidé que par des recherches ultérieures.

Si cette supposition se vérifiait, le *Sp. glaberrimus* deviendrait peut-être le type d'un sous-genre ayant beaucoup de rapports avec les *Spiriferina*, dont il aurait le test perforé, mais dont il se distinguerait par l'absence de la lame médiane de la grande valve et peut-être aussi par le faible développement de ses spires.

Dans ce cas, on devrait désigner ce sous-genre sous le nom de *Martinia*, proposé déjà par M. M'Coy, sans que cet auteur ait pu indiquer aucun bon caractère pour le distinguer des genres voisins.

Si ma supposition se vérifiait, il devrait recevoir comme seconde espèce le *Sp. speciosus*, Schl., provenant du calcaire dévonien moyen de l'Eifel, dont j'ai parfaitement observé la perforation du test, sur plusieurs échantillons.

NOTE ADDITIONNELLE

Par M. DAVIDSON (1).

J'ai oublié de mentionner, à la suite de ce que j'ai exposé à la page 4 de ce Mémoire, que diverses opinions avaient été émises relativement aux fonctions des bras, mais que celle qui est la plus généralement reçue et qui est la mieux fondée sur des dissections anatomiques faites avec soin, consiste à admettre, que ces appendices remarquables servaient à la fois à la respiration, en fonctionnant comme branchies, et à l'alimentation de l'animal.

Ainsi que l'a fait observer le Docteur Gratiolet, Pallas considérait les franges comme des branchies; cette opinion fondée sur les apparences extérieures, fut partagée par Lamanon et par Walsch et en partie acceptée par de Blainville.

M. Bouchard, en parlant des bras dans son Mémoire sur le genre *Davidsonia*, dit, que ces organes, dont la base tubuleuse consiste dans un canal veineux aboutissant dans la cavité péritonéale, sont à son avis, les auxiliaires les plus importants de l'acte de la respiration, et M. Hancock, qui est sans contredit la première autorité en ce qui concerne l'anatomie des Brachiopodes, fait observer, que pour se convaincre de la nature des fonctions des bras, il suffit de savoir que le sang est porté non seulement dans les cirrhes, après avoir passé dans les premiers, et que de là il revient directement au cœur.

M. le Dr Gratiolet est arrivé au même résultat, puisqu'il fait remarquer dans ses *Etudes anatomiques sur la Terebratula australis*, qu'il avait d'abord rejeté la manière de voir de Pallas, et donné la préférence à celle de Cuvier et de M. Owen, mais qu'il avait fini par l'adopter. Cette préférence est basée sur la communication bien certaine qui existe entre les tubes des franges et leurs canaux basilaires et entre ceux-ci et les lacunes du corps, faits qui l'ont conduit à penser que ces franges pourraient bien jouer un certain rôle dans la respiration. D'ailleurs leur organisation, à certains égards semblable à celle des branchies de quelques crustacés, l'a confirmé dans cette opinion, sans pour cela le pousser à déshériter des mêmes fonctions, les grands lobes du manteau.

M. Hancock ajoute encore, qu'un grand développement des bras semble être nécessaire à l'économie de l'animal et que les divers modes d'enroule-

---

(1) La dernière feuille de ce Mémoire était composée, lorsque j'ai reçu la note de M. Davidson. Elle m'a parue trop importante pour l'omettre. Elle complète l'historique des données que l'on possède sur l'organisation des Brachiopodes munis d'une spire.

L. de Kon.

ment dans la chambre palléale, n'ont pour but que de fournir à cet organe, renfermé dans un espace très-limité, l'étendue qui lui était nécessaire.

Il existe, dit-il, assez de preuves dans plusieurs genres de Brachiopodes fossiles, que les fonctions des bras pouvaient s'exercer sans qu'il fût nécessaire qu'ils se déroulassent. Ainsi, dans le genre *Atrypa*, dans lequel les bras sont enroulés, exactement comme ceux du genre *Rhynchonella*, le support calcaire empêchait non seulement le déroulement du bras, mais encore s'opposait à toute espèce de mouvement quelconque de celui-ci.

Il paraît donc de plus en plus évident, que, soit que les bras fussent libres ou soutenus par des apophyses calcareuses, ils ne pouvaient pas changer de place, ni servir d'auxiliaire dans l'ouverture des valves, ainsi que cela a été supposé par quelques auteurs.

EXPLICATION DE LA PLANCHE I,

PAR M. DAVIDSON.

Fig. 1. SPIRIFERA STRIATA, Martin. Une partie du test de la petite valve a été enlevée, afin de montrer la partie postérieure des cônes spiraux et leur point d'attache.

Fig. 2. — SCHRENKII, Keyserling. Intérieur de la *valve dorsale*, avec un de ses cônes spiraux, l'autre ayant été supprimé, afin de montrer les impressions musculaires. A, A, muscle adducteur ou muscle occluseur antérieur et postérieur de Hancock; J, apophyse cardinale servant d'attache au muscle cardinal ou divaricateur de Hancock; *t*, fossettes destinées à recevoir les dents de la valve opposée.

Fig. 3. — SCHRENKII, Keyserling. Intérieur de la *valve ventrale*. D, pseudodeltidium; *t*, dents cardinales; A, impressions du muscle adducteur, ou occluseur; R, impressions du muscle cardinal ou divaricateur. Plusieurs fragments instructifs de la partie interne de cette espèce ont été figurés et décrits par M. le Comte de Keyserling, dans l'ouvrage du Docteur Schrenck, intitulé : *die Tundren der Samojeden*.

Fig. 4. — CYRTÆNA, Dalman. Intérieur de la valve ventrale.

Fig. 5. — ANOSSOFI, De Verneuil. Idem.

Fig. 6. — MOSQUENSIS, Fischer. Idem.

J'ai fait dessiner ces trois dernières figures, afin de montrer les modifications que peuvent éprouver les *Spirifera*, dans le développement et la direction de leurs plaques dentales ou rostrales.

Fig. 7. CYRTIA TRAPEZOÏDALIS, Dalman. Intérieur de la valve ventrale, destiné à montrer que ses plaques dentales divergeantes sont semblables à celles des *Spirifera*, mais essentiellement différentes de celles des *Cyrtina*. D, pseudodeltidium; F, ouverture.

Fig. 8. — CUSPIDATA, Martin. Echantillon vu de profil; une partie des deux valves a été enlevée, afin de faire voir les deux plaques dentales ou rostrales divergeantes, M, M et N; A, partie de l'area; L, tour de spire.

Fig. 9. Spiriferina rostrata, Schlotheim. Une partie de la petite valve a été enlevée, afin de montrer la partie postérieure des cônes spiraux, ainsi que la position de l'arête médiane de la valve ventrale.

Fig. 10. — rostrata, Schlotheim. Intérieur de la valve ventrale, montrant la grande arête médiane ou septum A, qui a servi d'attache au muscle adducteur ou occluseur; R, impression du muscle ajusteur ventral; D, pseudodeltidium montrant parfaitement les deux petites plaques dont il est formé.

Fig. 11. Suessia plicata, E. Deslongchamps. Intérieur de la valve dorsale, sur laquelle on observe parfaitement l'apophyse J et les plaques cardinales fortement développées; cependant on ne connaît pas encore d'intérieur parfait de ce genre, de sorte qu'il a été impossible d'en représenter les appendices spiraux. Il serait à désirer en outre, que l'on pût avoir une bonne représentation de la grande valve, bien que plusieurs de ses caractères aient été décrits et figurés par M. E. Deslongchamps.

Fig. 12. Cyrtina heteroclyta, Defrance. Intérieur de la valve ventrale, afin de montrer le grand et unique septum médian, à la surface supérieure duquel s'attachent les plaques dentales ou rostrales; une petite partie du pseudodeltidium a été enlevée; celui-ci est très-bombé.

Fig. 13. — Demarlii, Bouchard. Valve ventrale destinée à montrer que dans cette espèce le septum médian s'étend jusque contre la surface interne du pseudodeltidium, et que les plaques dentales sont soudées aux côtés de celui-ci, au lieu de l'être à son bord supérieur, comme chez les *C. heteroclyta* et *septosa*. On ne connaît pas encore d'intérieur parfait de la valve dorsale d'aucune espèce de *Cyrtina*.

Fig. 14. Athyris (M'Coy) — Spirigera (d'Orb.) pectinifera, J. de C. Sowerby. Intérieur de la valve dorsale et une partie de la valve ventrale, grossis. La plaque cardinale et une petite ouverture circulaire, ainsi que les spires avec leurs appendices compliqués, se trouvent représentés dans cette figure; seulement, le cône spiral de droite a été légèrement déplacé de sa position naturelle, afin de mieux faire apercevoir la relation des lamelles. La charnière des deux valves est également visible, de même que les plaques rostrales et l'ouverture de la valve ventrale.

Fig. 15. — concentrica, V. Buch. Intérieur de la valve ventrale; les impressions des muscles adducteur A et divaricateur R, sont très-visibles dans cet échantillon; F, ouverture.

Fig. 16. MERISTA HERCULEA, Barrande. Intérieur de la valve ventrale, montrant l'appendice en forme de chausse-pied H, décrit en premier lieu par M. King.

Fig. 17. — TUMIDA, Dalman. Intérieur de la valve dorsale. Malgré toutes les peines que s'est données M. Suess pour parvenir à se procurer l'intérieur du genre qu'il a créé, une figure parfaite reste encore à en obtenir. Celle que je donne ici n'est pas suffisamment exacte, ni détaillée.

Fig. 18. — TUMIDA, Dalman. Intérieur de la valve ventrale; A, impression du muscle adducteur; R, celle du muscle divaricateur.

Fig. 19. — SCALPRUM, F. Roemer. Extérieur de la valve ventrale, sur lequel on remarque les deux lignes divergeantes dues aux plaques dentales, ainsi que le creux qui se trouve sous l'appendice en forme de chausse-pied, H.

Fig. 20. RETZIA SERPENTINA, De Koninck. D'après un dessin fait par M. S. P. Woodward; jusqu'ici on ne connaît aucune figure parfaite de l'intérieur de l'une ni de l'autre valve de cette espèce et tout ce que l'on sait, c'est que les échantillons de ce sous-genre sont munis d'appendices spiraux.

Fig. 21. TREMATOSPIRA ? Hall.
Fig. 22. NUCLEOSPIRA ? Hall. } Je ne possède pas les matériaux nécessaires pour représenter ces genres; mais il est à présumer que M. Hall y suppléera sous peu.

Fig. 33. UNCITES GRYPHUS, Defrance. Figure imparfaite d'une partie des deux valves, montrant la position des expansions en forme de poche, *g*, et le point d'attache des lamelles qui est supposée avoir donné naissance aux cônes spiraux. J'y ai ajouté un fragmeut d'un autre échantillon sur lequel on remarque des traces de spire L; une figure parfaite de ces appendices et des impressions musculaires des deux valves reste encore à obtenir.

Fig. 24. — GRYPHUS, Defrance. Le même échantillon vu de profil; une partie du test a été enlevée, afin de prouver que les poches n'ont aucune communication avec l'intérieur de la coquille.

Fig. 25. — GRYPHUS, Defrance. Echantillon destiné à montrer que dans le jeune âge la coquille s'attachait aux objets sous-marins, à l'aide d'un pédoncule sortant de l'ouverture F, dont le crochet de la grande valve était percé.

Fig. 26. ATRYPA (Dalman) SPIRIGERINA (d'Orb) RETICULARIS. Linnœus. Intérieur de la valve dorsale, montrant la position naturelle des cônes spiraux, verticaux.

Fig. 27. — RETICULARIS, Linnœus. Intérieur de la valve ventrale; F, ouverture; D, deltidium; T, dents cardinales; A, impression du muscle adducteur; R, P, celles

du muscle ventral ajusteur; V, celles des vaisseaux circulatoires.

Fig. 28. ATRYPA RETICULARIS, Linnœus. Echantillon dont la majeure partie de la valve dorsale a été enlevée, afin de montrer la partie postérieure des cônes spiraux.

Fig. 29. — — Intérieur de la valve dorsale, dont on a enlevé les lamelles spirales, afin de montrer les impressions du muscle adducteur ou occluseur antérieur et postérieur A.

Fig. 30. ANOPLOTHECA LAMELLOSA, G. Sandberger. Fragment laissant voir les cônes spiraux verticaux.

Fig. 31 — — Moule interne de la valve dorsale. A impressions du muscle adducteur; J, appendice cardinal.

Fig. 32. — — Moule interne de la valve ventrale. Les figures 30, 31 et 32 ont été copiées du Mémoire de M. G. Sandberger, publié en 1855, par l'Académie de Vienne. Il est à regretter que l'insuffisance des matériaux découverts jusqu'ici, n'aient pas permis à l'auteur du genre de nous donner une meilleure représentation des appendices spiraux (1).

Fig. 33. DAVIDSONIA VERNEUILII, Bouchard. Intérieur grossi de la valve dorsale; J, apophyse cardinale; *t*, fossettes; A, impressions du muscle adducteur. Une figure restaurée des lamelles spirales récemment découvertes par M. de Koninck a été ajoutée à l'un des côtés.

Fig. 34. — — Intérieur grossi de la valve ventrale, montrant les dents cardinales, le pseudodeltidium, les impressions des muscles adducteur A et divaricateur R, ainsi que celles des vaisseaux circulatoires V et enfin, les cônes calcaires massifs qui occupent le fond de la valve.

Fig. 35. KONINCKINA LEONHARDI, Wissman. Echantillon transparent, aminci au moyen d'un acide, vu du côté de la valve ventrale, ce qui permet d'apercevoir la position des lamelles spirales.

Fig. 36. — — Intérieur de la valve dorsale, ayant conservé une partie des lamelles spirales. Ces deux figures m'ont été communiquées par M. Suess.

---

(1) Les regrets de M. Davidson sont d'autant plus fondés que rien ne prouve que les appendices spiraux représentés par M. G. Sandberger, appartiennent réellement au genre et à l'espèce auxquels il les rapporte.

L. DE KON.

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

PAR M. DE KONINCK.

Fig. 1. Section longitudinale de *Cyrtina heteroclyta*. Defr. d'après Davidson
a. Moitié de l'area.
d. Pseudodeltidium.
v et *x.* Plaques dentales.
s. Septum médian.

Fig. 2. Valve ventrale de *Cyrtina septosa*, Phill. vue à l'intérieur ; d'après Davidson.
s. Septum médian, composé de deux lamelles.

Fig. 3. Moule interne de la valve dorsale du même ; d'après Davidson.
a. Impression du muscle adducteur ou occluseur postérieur.
a' Impression du muscle adducteur ou occluseur antérieur (1).

Fig. 4. Valve dorsale du même, vue à l'intérieur, d'après un échantillon du calcaire de Visé, de ma collection. Cet échantillon n'offre aucune trace des impressions musculaires.
p p. Plaques dentales, dont les extrémités étaient destinées à soutenir les spires calcaires.

Fig. 5. Spirifer distans, Sow., vue du côté de l'area, d'après un échantillon du calcaire de Tournay, de ma collection.

---

(1) Afin d'éviter tout malentendu, je ferai observer encore une fois que les muscles ayant pour fonctions d'ouvrir les valves ont été désignés récemment par M. Hancock sous le nom de *divaricateurs* et *divaricateurs accessoires* ; que ceux destinés à fermer les valves ont été nommés *occluseurs antérieur* et *postérieur* par ce même savant. Les divaricateurs sont ceux qui sont généralement connus sous le nom de *muscles cardinaux* (adductor brevis de Owen ; muscles diducteurs de Gratiolet) ; tandis que les *divaricateurs accessoires* sont mieux connus sous la désignation de *cardinaux accessoires* ou cardinalis de Owen.

L'*occluseur* égale le *muscle adducteur* de la plupart des auteurs; l'*occluseur antérieur* équivaut à l'*adductor longus anticus* de Owen ; l'*occluseur postérieur à l'adductor longus posticus* du même.

Les muscles pédiculaires ont reçu de M. Hancock le nom de *muscles ajusteurs*, parce qu'ils ont pour destination, de mouvoir la coquille sur son pédoncule et de la fixer; le *capsularis* de Owen a été désigné par M. Hancock sous le nom de *muscle pédonculaire*.

(Note de M. DAVIDSON.)

d. Ouverture deltoïdale.

d'. Pseudodeltidium. *d''* Pseudodeltidium complémentaire. J'ai fait figurer cet échantillon, afin de montrer la structure du pseudodeltidium, qui est formé de couches calcareuses légèrement imbriquées, servant à fermer plus de la moitié de l'ouverture deltoïdale de l'area; ce pseudodeltidium ne porte aucune trace d'ouverture. On remarquera en outre sur cette area en *d''* l'existence d'une sorte de cicatrice triangulaire, comme si une ouverture triangulaire plus grande que la fente deltoïdale y avait d'abord existé et avait été oblitérée ensuite. C'est à cette partie que j'ai donné le nom de *pseudodeltidium supplémentaire*. On ne peut donc pas se servir de ce caractère pour établir une division dans les *Orthis* ainsi que l'ont proposé quelques paléontologistes.

Fig. 6. Fragment de valve ventrale du même, vue du côté interne, d'après un échantillon du calcaire de Visé, de ma collection.

d' Pseudodeltidium.

s, *s*. Septum divergeant.

t. Tube appliqué contre la paroi interne du pseudodeltidium, mais dont on n'aperçoit aucune trace à l'extérieur. Le côté interne de ce tube est fendu sur toute sa longueur. L'absence d'ouverture dans le pseudodeltidium, malgré la présence de ce tube, prouve que le *Sp. distans* ne peut pas faire partie du genre *Cyrtia*.

Fig. 7. *Spririfer convolutus*. Phill., vu du côté de la valve dorsale, provenant du calcaire de Pauquys; de ma collection.

Fig. 8. Moule interne du même, vu du côté de la valve ventrale et montrant l'impression des vaisseaux circulatoires, provenant de la même localité; de ma collection. Comme cette impression est toute différente de celle du *S. bisulcatus*, il en résulte que ces deux espèces sont bien distinctes.

r. Impression du muscle cardinal ou divaricateur. *a*. Celle de l'adducteur ou occluseur.

Fig. 9. Spirifer lævissimus, de Kon.
Echantillon provenant du calcaire de Tournay, vu du côté de la petite valve; de ma collection.

Fig. 9 *a*. Fragment grossi du test, montrant les granulations dont sa surface est garnie.

Fig. 10. Le même, vu du côté opposé.

Fig. 11. Le même, vu du côté de l'area.

Fig. 12. Le même, vu du côté frontal.

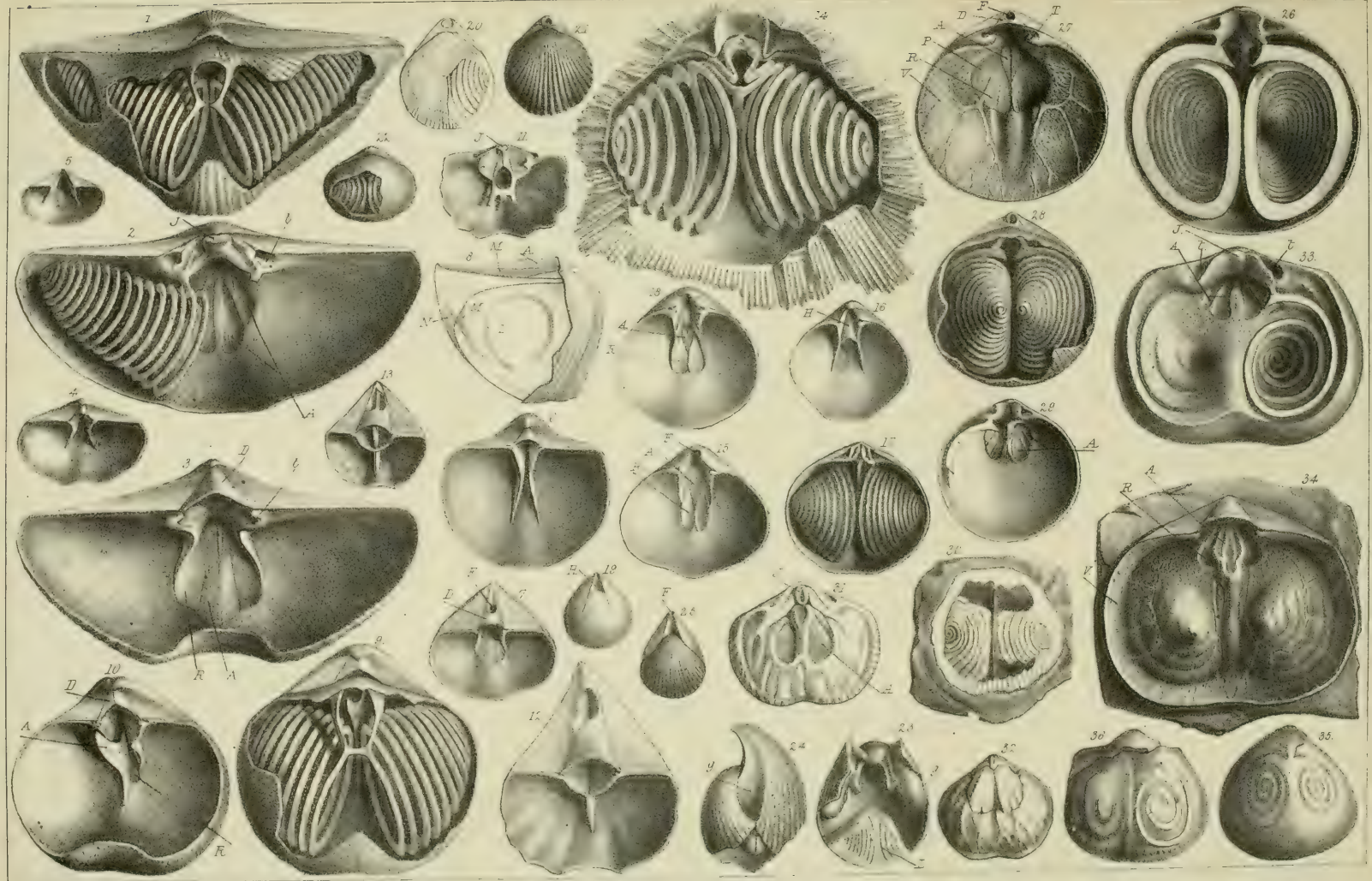
Fig. 13. Le même, vu de profil.

Fig. 14 Moule interne grossi de l'Athyris ambigua, Sow., vu du côté de la valve dorsale. Échantillon silicifié de Bakewell, de la collection du *Museum of practical Geology* de Londres, d'après Davidson.

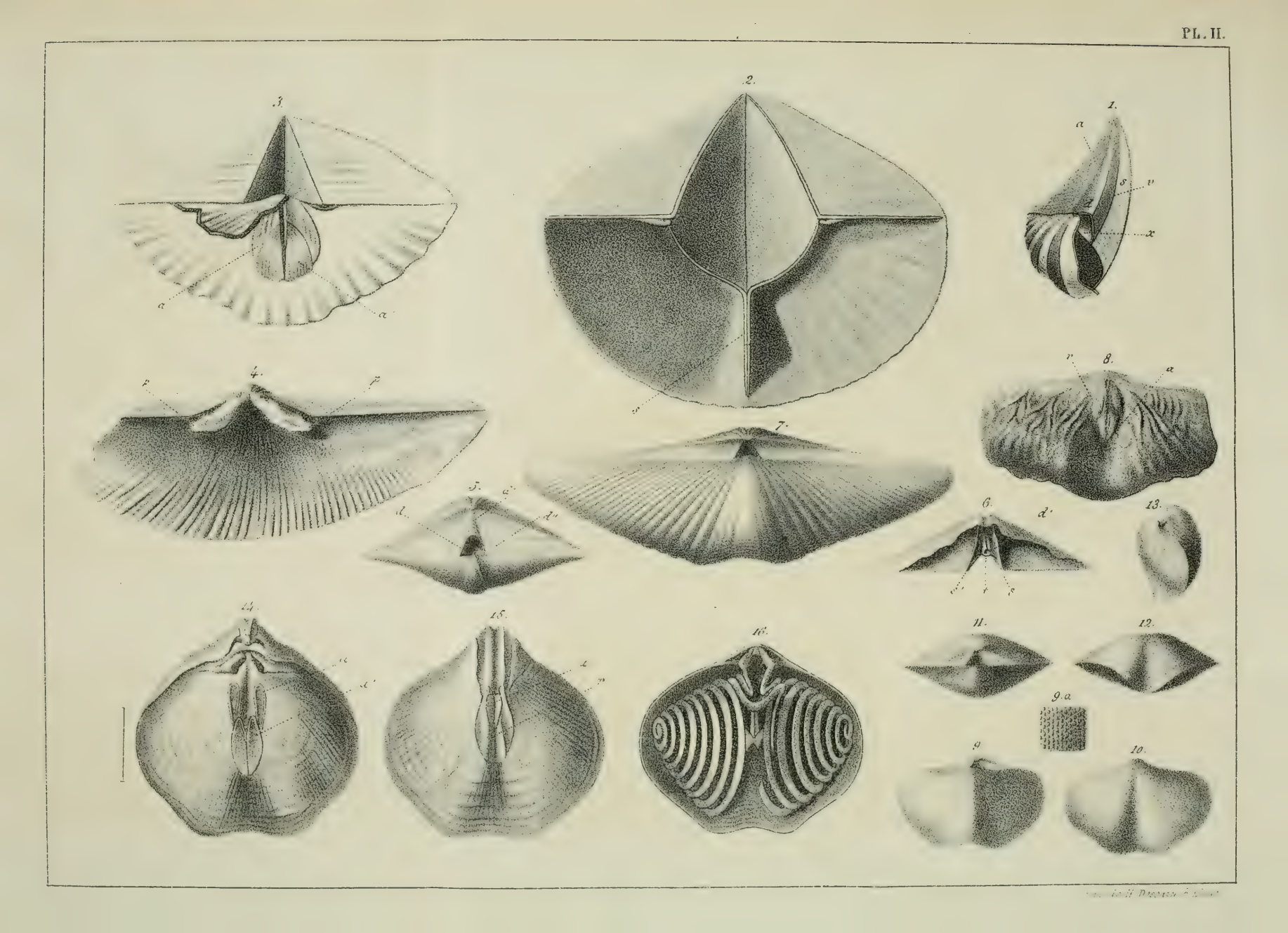
a. Impression de l'occluseur postérieur.
a'. Celle de l'occluseur antérieur.

Fig. 15. Le même vu du côté opposé.
a. Impression de l'occluseur.
r. Celle du divaricateur.

Fig. 16. Intérieur grossi de la valve dorsale de l'Athyris ambigua restaur d'après des échantillons du *Museum of pratical Geology*; d'après Davidson.



Thos Davidson del & lith


1.
a
s
v
x
2.
3.
a
a
4.
p
p'
5.
a'
d
d''
6.
d'
7.
8.
r
a
9.
9.a
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.

II. — *Des combinaisons avec répétition.*

* * * * *
* * * * *

PAR

J. MARTYNOWSKI,

AGRÉGÉ A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

1. Les combinaisons avec répétition, ou simplement les répétitions de r lettres a, b, c, d, ... prises m à m, se présentent dans le développement de la puissance m^e du polynome $a+b+c+d+\ldots$, dans lequel, après avoir effectué le développement, on aurait soin de remplacer par l'unité chaque coéfficient numérique $\frac{m}{1}, \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}, \ldots$

En désignant par

$$R_r = a + b + c + d + \ldots$$

un polynome composé de r lettres a, b, c, d, ... et par $(R_r)_m$ la répétition de l'ordre m qui en provient, nous aurons

$$(R_r)_m = (a + b + c + d + \ldots)_m$$

l'indice m marquant qu'il faut, après avoir effectué le développement de la puissance m^e du polynome R_r remplacer par l'unité chaque coéfficient numérique $\frac{m}{1}, \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}, \ldots$

2. De cette définition de répétitions, on déduit plusieurs conséquences.

1° Pour un nombre quelconque de lettres, on a toujours

$$(R_r)_0 = 1 .$$

C'est là la seule propriété commune aux répétitions et aux puissances.

2° Si on partage le polynome R_r en deux autres, tels que R_u et R_{r-u} de manière à avoir

$$R_r = R_u + R_{r-u}$$

il viendra

$$(R_r)_m = (R_u)_m \cdot (R_{r-u})_0 + (R_u)_{m-1} \cdot (R_{r-u})_1 + \cdots + \\ + (R_u)_1 \cdot (R_{r-u})_{m-1} + (R_u)_1 \cdot (R_{r-u})_m .$$

Ainsi, par exemple,

$$(a+b+c+d)_4 = (a+b)_4 + (a+b)_3 \cdot (c+d) + (a+b)_2 \cdot (c+d)_2 \\ + (a+b)_1 \cdot (c+d)_3 + (c+d)_4 .$$

$$= a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + \\ + (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(c+d) + \\ + (a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2) + \\ + (a+b) \cdot (c^3 + c^2d + cd^2 + d^3) + c^4 + c^3d + c^2d^2 + \\ + cd^2 + d^4 .$$

3° En désignant par $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ les lettres du polynome R_r, on a, d'après 2°

$$(R_r)_m = (R_{r-1})_m + (R_{r-1})_{m-1} \cdot a_r + \cdots + (R_{r-1})_1 \cdot a_r^{m-1} + a_r^m$$

$$= (R_{r-1})_m + a_r \left\{ (R_{r-1})_{m-1} + \cdots + (R_{r-1})_1 \cdot a_r^{m-2} + a_r^{m-1} \right\}$$

Or, la première de ces égalités donne

$$(R_r)_{m-1} = (R_{r-1})_{m-1} + (R_{r-1})_{m-2} \cdot a_r + \cdots + (R_{r-1})_1 \cdot a_r^{m-2} + a_r^{m-1}$$

donc, la seconde devient

$$(R_r)_m = (R_{r-1})_m + a_r \cdot (R_r)_{m-1} .$$

C'est la loi de récurrence des répétitions de r lettres et de l'ordre m.

4° Pour deux lettres a_p et a_q, le corollaire précédent donne

$$(R_r)_m = (R_r - a_p)_m + a_p \cdot (R_r)_{m-1} ,$$

$$(R_r)_m = (R_r - a_q)_m + a_q \cdot (R_r)_{m-1} .$$

En retranchant, membre à membre, ces égalités, on trouve

$$0 = (R_r - a_p)_m - (R_r - a_q)_m + (a_p - a_q) \cdot (R_r)_{m-1} ;$$

d'où l'on déduit

$$(R_r - a_p)_m - (R_r - a_q)_m = -(a_p - a_q) \cdot (R_r)_{m-1}$$

et par suite

$$(R_r - a_p)_m \equiv (R_r - a_q)_m , \ (mod = a_p - a_q)$$

congruence, dont la suivante

$$a^m \equiv b^m , \ (mod = a - b)$$

n'est qu'un cas particulier.

3. Une des propriétés remarquables des répétitions est que leur expression générale se compose d'autant de termes, qu'il y a de lettres ou d'éléments qui concourent à les former. Il est vrai que cette propriété est commune à toutes les fonctions symétriques en général ; néanmoins, cette propriété est plus évidente pour les répétitions, que pour les autres, telles que sommes de combinaisons sans répétition, etc...

1° S'il n'y a qu'une lettre, on a

$$(a)_m = a^m.$$

2° Pour deux lettres on a

$$(a+b)_m = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \cdots + ab^{m-1} + b^m$$

c'est-à-dire

$$(a+b)^m = \frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b} = \frac{a^{m+1}}{a-b} + \frac{b^{m+1}}{b-a}$$

3° Pour trois lettres a, b et c, on a d'abord

$$(a+b+c)_m = (a+b)_m + (a+b)_{m-1} \cdot c + \cdots + (a+b)_1 + c^{m-1} + c^m;$$

et par suite

$$(a+b+c)^m = \frac{a^{m+1}}{a-b} + \frac{b^{m+1}}{b-a} + \left(\frac{a^m}{a-b} + \frac{b^m}{b-a}\right) \cdot c + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a}\right) \cdot c^{m-1} + \left(\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}\right) \cdot c^m.$$

Or, le second membre de cette égalité peut s'écrire, comme il suit

$$\frac{a}{a-b}\left(a^m + a^{m-1}c + a^{m-2}c^2 + \cdots + ac^{m-1} + c^m\right) +$$

$$\frac{b}{b-a}\left(b^m + b^{m-1}c + b^{m-2}c^2 + \cdots + bc^{m-1} + c^m\right) ;$$

donc

$$(a+b+c)_m = \frac{a}{a-b}\left(\frac{a^{m+1}}{a-c} + \frac{c^{m+1}}{c-a}\right) + \frac{b}{b-a}\left(\frac{b^{m+1}}{b-c} + \frac{c^{m+1}}{c-b}\right)$$

$$= \frac{a^{m+2}}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^{m+2}}{(b-a)(b-c)} + c^{m+1}\left(\frac{a}{(a-b)(c-a)} + \frac{b}{(b-a)(c-b)}\right)$$

et finalement

$$(a+b+c)_m = \frac{a^{m+2}}{(b-c)(a-a)} + \frac{b^{m+2}}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^{m+2}}{(c-a)(c-b)}.$$

4° Pareillement, pour quatre lettres a, b, c et d, on aura

$$(a+b+c+d)_m = \frac{a^{m+3}}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^{m+3}}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^{m+3}}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^{m+3}}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Ainsi des autres sommes.

Cette induction met sur la voie de la proposition énoncée. Il reste à prouver que si cette proposition est vraie pour une, deux, trois, etc. r lettres, elle est aussi vraie pour $r+1$ lettres, et par suite pour un nombre quelconque de lettres.

Posons d'abord quelques principes.

4. En disant qu'une expression de r lettres a, b, c, d, ... est symétrique, lorsqu'elle ne change pas par la permutation, les unes dans les autres, de toutes les lettres, qui y sont employées ; on énonce à la rigueur les r conditions, que cette expression doit remplir, pour être symétrique.

Ces r conditions peuvent être énoncées, comme il suit :

En écrivant les r lettres a, b, c, d, ... dans un ordre circulaire, de manière que chacune d'elles puisse être considérée comme initiale de toutes les autres, qui la suivent ; toute expression symétrique de r lettres peut être répartie en r éléments, tels que si dans l'une d'eux, on échange chaque lettre en celle qui la suit immédiatement dans l'ordre circulaire, cet élément se change en un autre ; ce dernier, en suivant la même marche, produit un troisième élément ; et ainsi des autres.

Corollaire. Si, dans une expression symétrique de r lettres, on trouve n'importe de quelle manière, les $r-1$ éléments, qui remplissent déjà les $r-1$ conditions de symétrie, le reste de cette expression n'est autre chose que le r^e élément, plus une fonction symétrique de toutes les lettres ; à moins que cette dernière ne soit nulle d'elle-même.

5. cela posé, soit

$$R_r = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a$$

un polynome composé de r lettres a_1, a_2, a_3, ... a_r. Désignons par $\pi_r(a_1)$, $\pi_r(a_2)$, $\pi_r(a_3)$, ... les produits des différences de chaque lettre à toutes celles qui la suivent dans un ordre circulaire, de manière qu'on ait

$$\pi_r(a_1) = (a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_3) \cdot (a_1 - a_4) \cdot \cdots \cdot (a_1 - a_r)$$
$$\pi_r(a_2) = (a_2 - a_3) \cdot (a_2 - a_4) \cdot (a_2 - a_5) \cdot \cdots \cdot (a_2 - a_1)$$

etc., etc..

et supposons qu'on ait

$$(R_r)_m = \frac{a_1^{m-r+1}}{\pi_r(a_1)} + \frac{a_2^{m+r-1}}{\pi_r(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{m+r-1}}{\pi_r(a_r)};$$

je dis que, pour un polynome

$$R_{r+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_r + a_{r+1}$$

comprenant une lettre de plus, on aura

$$(R_{r+1})_m = \frac{a_1^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_r)} + \frac{a_{r+1}^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})}$$

expression, dans laquelle on a

$$\pi_{r+1}(a_1) = (a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_3) \cdot (a_1 - a_4) \cdots (a_1 - a_r) \cdot (a_1 - a_{r+1})$$
$$\pi_{r+1}(a_2) = (a_2 - a_3) \cdot (a_2 - a_4) \cdot (a_2 - a_5) \cdots (a_2 - a_{r+1}) \cdot) a_2 - a_1)$$

etc., etc.,

Démonstration. On a

$$(R_{r+1})_m = (R_r)_m + (R_r)_{m-1} \cdot a_r + \cdots + (R_r)_1 \cdot a_{r+1}^{m-1} + a_{r+1}^m.$$

En y substituant pour $(R_r)_m$, $(R_r)_{m-1}$, $(R_r)_{m-2}$, ... les valeurs que l'on suppose vraies, il viendra

$$(R_{r+1})_m = \frac{a_1^{m+r-1}}{\pi_r(a_1)} + \frac{a_2^{m+r-1}}{\pi_r(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{m+r-1}}{\pi_r(a_r)} +$$
$$\left\{ \frac{a_1^{m+r-2}}{\pi_r(a_1)} + \frac{a_2^{m+r-2}}{\pi_r(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{m+r-2}}{\pi_r(a_r)} \right\} \cdot a_{r+1} +$$
$$\left\{ \frac{a_1^{m+r-3}}{\pi_r(a_1)} + \frac{a_2^{m+r-3}}{\pi_r(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{m+r-3}}{\pi_r(a_r)} \right\} \cdot a_{r+1}^2 +$$
$$\cdots \cdots \cdots \cdots$$
$$\left\{ \frac{a_1^{r-1}}{\pi_r(a_1)} + \frac{a_2^{r-1}}{\pi_r(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{r-1}}{\pi_r(a_r)} \right\} \cdot a_{r+1}^m$$

Or, le second membre de cette égalité peut s'écrire comme il suit

$$\frac{a_1^{r-1}}{\pi_r(a_1)} \cdot \left\{ a_1^m + a_1^{m-1} \cdot a_{r+1} + \cdots + a_1 \cdot a_{r+1}^{m-1} + a_{r+1}^m \right\} +$$

$$\frac{a_1^{r-1}}{\pi_r(a_2)}\cdot\left\{a_2^m + a_2^{m-1}\cdot a_{r+1} + \cdots + a_2\cdot a_{r+1}^{m-1} + a_{r+1}^m\right\} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_r^{r-1}}{\pi^r(a^r)}\cdot\left\{a_r^m + a_r^{m-1}\cdot a_{r+1} + \cdots + a_r\cdot a_{r+1}^{m-1} + a_{r+1}^m\right\}$$

c'est-à-dire

$$\frac{a_1^{r-1}}{\pi_r(a_1)}\cdot\left\{\frac{a_1^{m+1}}{a_1-a_{r+1}} + \frac{a_{r+1}^{m+1}}{a_{r+1}-a_1}\right\} + \frac{a_2^{r-1}}{\pi_r(a_2)}\cdot\left\{\frac{a_2^{m+1}}{a_2-a_{r+1}} + \frac{a_{r+1}^{m+1}}{a_{r+1}-a_2}\right\} +$$

$$\cdots + \frac{a_r^{r-1}}{\pi_r(a_r)}\cdot\left\{\frac{a_r^{m+1}}{a_r-a_{r+1}} + \frac{a_{r+1}^{m+1}}{a_{r+1}-a_r}\right\};$$

donc

$$(R_{r+1})_m = \frac{a_1^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_2)} +$$

$$-\left\{\frac{a_r^{r+1}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{r+1}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})}\right\}$$

La première ligne du second membre contient déjà les r éléments de symétrie ; il faut donc que la seconde ligne soit le $(r+1)^{\text{ème}}$ élément plus une fonction symétrique de $r+1$ lettres et que nous représenterons par $-f_{r+1}$, de sorte qu'on ait

$$-a_{r+1}^{m+1}\cdot\left\{\frac{a_1^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_r)}\right\} =$$

$$= \frac{a_r^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_r)} - f_{r+1}$$

c'est-à-dire

$$f_{r+1} = a_{r+1}^{m+1}\left\{\frac{a_1^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})}\right\}.$$

Par suite de ces transformations, on a

$$(R_{r+1})_m = \frac{a_1^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_{r+1}^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})} - f_{r+1}$$

Or, il est aisé de voir que, dans l'expression de f_{r+1}, la partie comprise entre les $\{\}$ est une fonction symétrique de $r+1$ lettres du polynome R_{r+1}. En égalant cette partie à K,

on a : $f_{r+1} = a_{r+1}^{m+1} . K$; et en échangeant, dans cette dernière expression, a_{r+1} en a_1, a_2, a_3, . . .

$$f_{r+1} = a_{r+1} . K = a_1 . K = a_2 . K = \text{etc., etc. .}$$

puisque f_{r+1} et K sont des fonctions invariables. Si cette fonction f_{r+1} pouvait subsister, on en conclurait : $a_1 = a_2 = a_3 = \text{etc.}$; ce qui ne peut avoir lieu, puisque le polynome R_{r+1} est censé ne contenir que des lettres différentes. Ainsi, la fonction f_{r+1} est du genre des fonctions identiquement nulles, c'est-à-dire qu'elle ne peut subsister à moins qu'elle ne soit nulle d'elle-même. Donc.

$$(R_{r+1})_m = \frac{a_1^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{r+1}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \ldots + \frac{a_{r+1}^{m+1}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})}$$

et c'est ce qu'il fallait démontrer.

6. De ce que la fonction f_{r+1}, signalée dans le n° précédent, est nulle d'elle-même; en égalant son expression à zéro, après la suppression préalable du facteur a_{r+1}, qui n'est pas nul, on conclut que

$$1) \ldots 0 = \frac{a_1^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{r+1}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \ldots + \frac{a_{r+1}^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})} .$$

Or, cette dernière égalité n'est autre chose que $(R_{r+1})_m$ pour $m = -1$; donc $(R_{r+1})_{-1} = 0$. Néanmoins cette expression n'est vraie que lorsque le nombre des lettres employées dans une répétition est au moins deux. Car, si ce nombre était égal à un, la répétition dans ce cas devenant une puissance, on serait à conclure qu'une quantité, affectée de l'exposant -1, est égale à zéro, quelle que soit la valeur de cette quantité. On a donc, sous la réserve expresse, $r \gtrless 2$, les égalités suivantes

$$2) \ldots (R_2)_{-1} = 0, (R_3)_{-1} = 0, \ldots (R_r)_{-1} = 0, \ldots$$

En changeant r en $r-1$ dans l'égalité 1), ou ce qui revient au même, en posant

$$0 = \frac{a_1^{r-2}}{\pi_r(a_1)} + \frac{a_2^{r-2}}{\pi_r(a_2)} + \ldots + \frac{a_r^{r-2}}{\pi_r(a_r)}$$

Multiplions les deux termes de la première fraction du second membre par $a_1 - a_{r+1}$, ceux de la seconde par $a_2 - a_{r-1}$,

et ainsi de suite jusqu'à la dernière, dont nous multiplierons les deux termes par $a_r - a_{r+1}$; et nous aurons

$$0 = \frac{a_1^{r-2}(a_1 - a_{r+1})}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{r-2}(a_2 - a_{r+1})}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{r-2}(a_r - a_{r+1})}{\pi_{r+1}(a_r)}$$

à cause de

$$\pi_{r+1}(a_1) = \pi_r(a_1) \cdot (a_1 - a_{r+1}),\ \pi_{r+1}(a_2) = \pi_r(a_2) \cdot (a_2 - a_{r+1}),\ \text{etc.}$$

L'égalité qu'on vient de poser peut s'écrire comme il suit

$$\frac{a_1^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_r)}$$
$$= a_{r+1} \cdot \left\{ \frac{a_1^{r+2}}{\pi_{r-1}(a_1)} + \frac{a_2^{r-1}}{\pi_{r+2}(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{r-2}}{\pi_{r+1}(a_r)} \right\}$$

Or, le premier membre de cette égalité, en vertu de la relation 1) peut être remplacé par

$$- \frac{a_{r+1}^{r-1}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})};$$

donc, en substituant, réduisant tout à zéro, puis en supprimant le facteur a_{r+1}, qui ne peut pas être nul, on aura

$$5) \ldots 0 = \frac{a_1^{r-2}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{r-2}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_{r+1}^{r-2}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})}.$$

Cette dernière égalité n'est autre chose que l'expression de $(R_{r+1})_m$, lorsqu'on y fait $m = -2$; donc, $(R_{r+1})_{-2} = 0$. Néanmoins, cette rélation n'est vraie que lorsque le nombre de lettres employées est au moins trois. On a donc, cette restriction admise

$$4) \ldots (R_3)_{-2} = 0,\ (R_4)_{-2} = 0,\ \ldots\ (R_r)_{-2} = 0, \ldots$$

En prenant, pour point de départ, l'égalité 5) et en opérant de la même manière, on trouvera

$$5) \ldots 0 = \frac{a_1^{r-3}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \frac{a_2^{r-3}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \cdots + \frac{a_{r+1}^{r-3}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})}$$

égalité qui n'est autre chose que $(R_{r+1})_{-3} = 0$. Néanmoins, cette égalité n'est vraie que lorsque le nombre de lettres employées est au moins quatre, de sorte que ce n'est que sous cette réserve expresse, qu'on a

6) . . . $(R_4)_{-3} = 0$; $(R_5)_{-3} = 0$, . . . $(R_r)_{-3} = 0$, . . .

Ainsi des autres.

Scholie. En partant de l'égalité (N° 2, 3°)

$$(R_r)_m = (R_{r-1})_m + a_r \cdot (R_r)_{m-1}$$

qui exprime la récurrence des répétitions de r lettres et de l'ordre m, on trouve en posant $m = 0$

$$(R_r)_0 = (R_{r-1})_0 + a_r \cdot (R_r)_{-1}$$

c'est-à-dire

$$1 = 1 + a_r \cdot (R_r)_{-1}$$

et par suite $(R_r)_{-1} = 0$. Néanmoins, l'expression $(R_r)_m$ n'est pas nulle pour toutes les valeurs négatives de m. En général, et c'est ce que nous allons démontrer dans les deux numéros suivants, l'expression $(R_r)_m$ n'est nulle que pour $m = -1, -2, -3, \ldots -(r-1)$ c'est-à-dire pour autant de valeurs négatives de m, qu'ils y a de lettres moins un.

7. D'abord, nous allons démontrer qu'il existe une rélation entre la répétition affectée d'un indice négatif et la répétition proprement dite des inverses de la même somme.

L'expression

$$(R_r)_m = \frac{a_1^{m+r-1}}{\pi_r(a_1)} + \frac{a_2^{m+r-1}}{\pi_r(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{m+r-1}}{\pi_r(a_r)}$$

en y changeant m en $-m$, donne

$$(R_r)_{-m} = \frac{a_1^{-m+r-1}}{\pi_r(a_1)} + \frac{a_2^{-m+r-1}}{\pi_r(a_2)} + \cdots + \frac{a_r^{-m+r-1}}{\pi_r(a_r)}.$$

Posons maintenant

$$R_{-r} = a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1} + \cdots + a_r^{-1}$$

et nous aurons $(R_{-r})_m$, en changeant a_1 en a_1^{-1}, a_2 en a_2^{-1},... dans $(R_r)_m$, savoir

$$(R_{-r})_m = \frac{a_1^{-m-r+1}}{\pi_r(a_1^{-1})} + \frac{a_2^{-m-r+1}}{\pi_r(a_2^{-1})} + \cdots + \frac{a_r^{-m-r+1}}{\pi_r(a_r^{-1})}$$

Or,

$$\pi_r(a_1^{-1}) = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_r}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}\,.\,\pi_r(a_1)}{(a_1)^{r-1}\,.\,a_2\,.\,a_3\,\ldots\,a_r},$$

$\pi_r(a_2^{-1}) =$ etc., etc..

donc

$$(R_{-r})_m = (-1)^{r-1}\,a_1a_2a_3\ldots a_r\left(\frac{1}{a_1^{m+1}\,.\,\pi_r(a_1)} + \frac{1}{a_2^{m+1}\,.\,\pi_r(a_2)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_r^{m+1}\,.\,\pi_r(a_r)}\right).$$

D'autre part, si dans l'expression de $(R_r)_{-m}$, on remplace m par $m+r$, on a

$$(R_r)_{-m-r} = \frac{1}{a_r^{m+1}\,.\,\pi_r(a_1)} + \frac{1}{a_2^{m+1}\,.\,\pi_r(a_2)} + \ldots + \frac{1}{a_r^{m+1}\,.\,\pi_r(a_r)}$$

En divisant, membre à membre, les deux dernières égalités, on trouve

$$\frac{(R_{-r})_m}{(R_r)_{-m-r}} = (-1)_{r-1}\,a_1\,a_2\,a_3\ldots a_r$$

ou bien, en changeant m en $m-r$,

$$(R_r)_{-m} = \frac{(-1)^{r-1}\,.\,(R_{-r})_{m-r}}{a_1a_2a_3\ldots a_r}.$$

Telle est la relation demandée.

Scholie. On conçoit aisément la répétion d'une somme et la répétition des inverses de cette somme; et il en résulte que si une répétition affectée d'un indice négatif ne peut être rattachée à la répétition proprement dite des inverses d'une somme, elles sont nécessairement nulles, l'une et l'autre. Dans la relation, qu'on vient de trouver, il existe $r-1$ valeurs de m, pour lesquelles, une expression, telle que $(R_r)_{-m}$ ne peut être rattachée à $(R_{-r})_{m-r}$, dont l'indice est positif. En posant $a_1a_2a_3\ldots a_r = P$ et $m = 1, 2, 3, \ldots (r-1)$, la relation trouvée donne

$$P.\ (R_r)_{-1} = (-1)^{r-1}.\ (R_{-r})_{-(r-1)}$$
$$P.\ (R_r)_{-2} = (-1)^{r-1}.\ (R_{-r})_{-(r-2)}$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$P.\ (R_r)_{-(r-1)} = (-1)^{r-1}.(R_{-r})_{-1}$$

Cela posé, on voit qu'il y a $r-1$ expressions, telles que $(R_r)_{-1}$, $(R_r)_{-2}$, ... dont l'existence ne peut être rattachée à celle de la répétition proprement dite des inverses de la même somme; ces $r-1$ expressions sont nulles, ainsi que leurs correspondantes.

8. En prenant successivement deux, trois, etc. lettres, on démontre aisément les restrictions auxquelles sont soumises, n° 6, les expressions de $(R_r)_{-1}$, $(R_r)_{-2}$, $(R_r)_{-3}$, etc. .

Ainsi, pour une répétition de deux lettres a et b, on a

$$(a+b)_m = a^m + b.(a+b)_{m-1}.$$

Si $m=0$, on trouve $(a+b)_{-1} = 0$; mais, en posant $m=-1$, on ne trouve pas $(a+b)_{-2}$ égale à zéro. Dès lors, la valeur de $(a+b)_{-2}$ est précisément la même que fournit la relation du n° 7, savoir

$$(a+b)_{-2} = -\frac{1}{ab}.$$

En prenant trois lettres a, b et c, on a

$$(a+b+c)_m = (a+b)_m + c(a+b+c)_{m-1}.$$

En y posant $m=0$ et $m=-1$, on trouve

$$(a+b+c)_{-1} = 0, \quad (a+b+c)_{-2} = 0,$$

tandis que

$$(a+b+c)_{-3} = +\frac{1}{abc}, \ (a+b+c)_{-4} = \text{etc.},..$$

Ainsi des autres.

9. La difficulté d'assigner les valeurs de m qui rendent l'expression $(R_r)_m$ nulle, tient à ce que cette expression est une fonction de deux arguments, dont l'un r exprime le nombre de lettres et qui ne peut être moindre que deux, et dont l'autre m porte sur les exposants des lettres et qui, comme tel, est susceptible de recevoir toutes les valeurs entières ou fractionnaires, positives ou négatives. En ayant égard à l'une et à

l'autre de ces circonstances, la récurrence de $(R_r)_m$ affecte des formes différentes. Ainsi, en partant de la formule

$$(R_r)_m = a_r . (R_r)_{m-1} + (R_{r-1})_m$$

on arrive successivement à

$$\begin{aligned}(R_r)_m &= a_r . (R_r)_{m-1} + (R_{r-1})_m \\ &= a_r . (R_r)_{m-1} + a_{r-1} . (R_{r-1})_{m-1} + (R_{r-2})_m \\ &= a_r . (R_r)_{m-1} + a_{r-1} . (R_{r-1})_{m-1} + (a_{r-2} . (R_{r-2})_{m-1} + (R_{r-3})_m\end{aligned}$$

etc., etc..

En poussant ces expressions jusqu'au terme $(R_1)_m = a_1^m = a_1 (R_1)_{m-1}$ et en renversant, on aura

$$1)\ldots (R_r)_m = a_1 . (R_1)_{m-1} + a_2 . (R_2)_{m-1} + a_3 . (R_3)_{m-1} + \ldots + a_r . (R_r)_{m-1}.$$

Telle est la récurrence de $(R_r)_m$ non moins remarquable que la suivante

$$2)\ldots (R_r)_m = (R_{r-1})_m + a_r . (R_{r-1})_{m-1} + a_r^2 . (R_{r-1})_{m-2} + \ldots + a_r^m . (R_{r-1})_0$$

et qui nous est déjà connue.

10, La formule qui donne $(R_r)_m$ devient illusoire, lorsque deux ou plusieurs lettres deviennent égales.

Commençons par la répétition de deux lettres. Si dans

$$(R_2)_m = (a+b)_m = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \ldots + b^m$$

on fait $b = a$, on trouve

$$(2a)_m = (m+1) . a^m.$$

Dans la répétition de trois lettres a, b et c, posons $c = b$, et nous aurons

$$(a+2b)_m = a^m + 2a^{m-1}b + 3a^{m-2}b^2 + \ldots + (m+1)b^m$$

Pour sommer cette dernière série, multiplions les deux membres par $a-b$ et nous aurons

$$\begin{aligned}(a-b).(a+2b)_m &= a^{m+1} + 2a^m b + 3a^{m-1}b^2 + \ldots + (m+1)ab^m \\ &\quad - a^m b - 2a^{m-1}b^2 - \ldots - mab^{m-1} - (m+1)b^{m+1} \\ &= a.(a+b)_m - (m+1)b^{m+1}\end{aligned}$$

Dans la répétition de quatre lettres a, b, c et d, posons $d=c=b$, et nous aurons

$$(a-b).(a+3b)_m=a.(a+2b)_m-\frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}.b^{m+1}$$

et ainsi des autres.

Généralement,

$$(a-b).(a+\mu b)_m=a.(a+\overline{\mu-1}.b)_m-\frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}\ldots\frac{m+\mu-1}{\mu-1}.b^{m+1}.$$

De ces expressions, on déduit les formules particulières suivantes :

$$(a+2b)_m=\left(\frac{a}{a-b}\right).(a+b)_m-\frac{b^{m+1}}{a-b}.\frac{m+1}{1}$$

$$(a+3b)_m=\left(\frac{a}{a-b}\right)^2.(a+b)_m-\frac{b^{m+1}}{a-b}.\left\{\frac{m+1}{1}.\frac{a}{a-b}+\frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}\right\}$$

$$(a+4b)_m=\left(\frac{a}{a-b}\right)^3.(a+b)_m-\frac{b^{m+1}}{a-b}.\left\{\frac{m+1}{1}.\left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}.\right.$$
$$\left.\left(\frac{a}{a-b}\right)+\frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}\right\}$$

etc., etc....

En posant $a=0$, ces formules donnent

$$\frac{m+1}{1}.b^m,\ \frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}.b^m,\ \frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}.b^m,\ \text{etc., etc.}$$

c'est-à-dire qu'elles expriment ce que devient la répétition de deux, trois, quatre ., etc., égales.

Dès lors, si la répétition $(R_{\mu+r})_m$ contient un système de μ lettres égales à a, on posera d'abord

$$(R_{\mu+r})_m=(R_\mu)_m+(R_\mu)_{m-1}.(R_r)_1+(R_\mu)_{m-2}.(R_r)_2+\ldots(R_r)_m;$$

puis

$$(R_\mu)_m=(\mu a)_m=\frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}\ldots\frac{m+\mu-1}{\mu-1}.a^m$$

$$(R_\mu)_{m-1}=(\mu a)_{m-1}=\text{etc.}.$$

Cela posé, la répétition, dont μ lettres deviennent égales, s'exprime, comme il suit

$$(R_{r+\mu a})_m=(\mu a)_m+(\mu a)_{m-1}.(R_r)_1+(\mu a)_{m-2}.(R_r)_2+\ldots+(R_r)_m.$$

Si le polynome R_r contenait un système d'autres lettres égales à b, une nouvelle décomposition serait nécessaire.

11. Les répétitions ont cela de commun avec toutes les fonctions symétriques, qu'elles peuvent exprimer à l'aide des fonctions symétriques des racines d'une équation.

Soit une série récurrente

$$\frac{1}{1-c_1x+c_2x^2-c_3x+\ldots}=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

En chassant le dénominateur et en égalant à zéro les coefficients de diverses puissances de x, on trouvera

$$\begin{aligned}
0 &= A_1 - c_1\\
0 &= A_2 - c_1A_1\\
0 &= A_3 - c_1A_2 + c_2A_1 - c_3\\
0 &= A_4 - c_1A_3 + c_2A_2 - c_3A_1 + c_4\\
0 &= A_5 - c_1A_4 + c_2A_3 - c_3A_2 + c_4A_1 - c_5
\end{aligned}$$

etc., etc. . .

Le calcul de A_1, A_2, A_3, . . . donne

$$\begin{aligned}
A_1 &= c_1\\
A_2 &= -c_2 + c_1^2\\
A_3 &= c_3 - 2c_1c_2 + c_1^3\\
A_4 &= -c_4 + 2c_1c_3 + c_2^2 - 3c_1^2c_2 + c_1^4\\
A_5 &= c_5 - 2c_1c_4 - 2c_2c_3 + 3c_1^2c_3 + 3c_1^2c_2 - 4c_1^3c_2 + c_1^4
\end{aligned}$$

etc, etc. . . .

Or, si l'on a une équation, telle que

$$0 = x^r - c_1x^{r-1} + c_2x^{r-2} - c_3x^{r-3} + \ldots + (-1)^r c_r$$

c_1, c_2, c_3, . . . seront les sommes des combinaisons des racines une à une, deux à deux, trois à trois, etc., etc. . . Cela posé, il sera aisé de démontrer que A_1, A_2, A_3, . . . ne sont autre chose que les répétitions proprement dites des racines de la proposée, prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc., etc... En effet, si l'on désigne par a et b les racines d'une équation, on aura

$$\frac{1}{1-(a+b)x+abx^2}=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

et

$$A_1=a+b,\ A_2=a^2+ab+b^2,\ A_3=a^3+a^2b+ab^2+b^3,\ \text{etc.}$$

Cette propriété étant reconnue comme vraie, lorsqu'il y a

deux lettres, sera également vraie, lorsqu'on aura trois lettres. Ainsi, en posant

$$\frac{1}{1-(a+b+c)x+(ab+ac+bc)x^2-abcx^3} = 1+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\cdots$$

on aura

$$B_1 = (a+b+c)_1,\ B_2 = (a+b+c)_2,\ B_3 = (a+b+c)_3, \ldots$$

Ainsi des autres. Il est donc permis de conclure, sur cette voie d'induction, que si la série récurrente est un divisé par un polynome algébrique du degré r en x; les coefficients de cette série récurrente sont les répétitions des racines que fournit le polynome en question égale à zéro.

12. Venons en maintenant à la construction immédiate des répétitions à l'aide des fonctions invariables des racines d'une équation.

En distribuant chaque expression de A en groupes de termes comprenant chacun un facteur de plus, on voit aisément (N° 11) que les signes de ces groupes sont alternes. De plus, si on désigne par c_mCu l'agrégat des termes, comprenant u facteurs, de manière que la somme des numéros, des lettres employées, soit partout égale à m, et que chaque puissance i d'une lettre soit divisée par la factorielle correspondante $1^{i/1}$, l'expression générale de A, N° 11, sera

$$A_m = (1-)^{m-1}\left\{c_m - 1^{2/1}c_mC2 + 1^{3/1}c_mC3 - 1^{4/1}c_mC4 + \cdots\right\}.$$

On peut aussi ordonner cette expression suivant les puissances descendantes de la lettre c_1, de sorte que

$$A_m = c_1^m - c_1^{m-2}\cdot(m-1)\cdot c_2 +$$

$$+c_1^{m-4}\cdot\left\{(m-2)\,c_1c_2 + (m-2)^{2/-1}\cdot\frac{c_2^2}{1.2}\right\} +$$

$$-c_1^{m-6}\cdot\left\{(m-3)c_1^2c_4+(m-3)^{2/-1}\cdot c_1c_2c_3+(m-3)^{3/-1}\cdot\frac{c_2^3}{1.2.3}\right\}+$$

$$+c_1^{m-8}\cdot\left\{(m-4)\cdot c_1^3c_5 + (m-4)^{2/-1}\cdot c_1^2\left(c_2c_4+\frac{c_3^2}{1.2}\right) +\right.$$

$$\left.+(m-4)^{3/-1}\cdot c_1\cdot\frac{c_2^2}{1^{2/1}}\cdot c_3 + (m-4)^{4/-1}\cdot\frac{c_2^4}{1^{4/1}}\right\}+$$

etc., etc.

jusqu'aux termes qui contiennent des puissances négatives de C_1, termes qui tous doivent être négligés (Philosophie de la Technie algorithmique, pages 457 et 458).

13. On peut aussi exprimer les répétitions à l'aide des sommes des puissances semblables des racines d'une équation, dont les racines sont les éléments d'une répétition.

Soient s_1, s_2, s_3, ... les sommes des puissances 1^{re}, 2^{me}, 3^{me}, ... des racines de l'équation

$$0 = x^r - c_1 x^{r-1} + c_2 x^{r-2} - \ldots + (-1)^r c_r .$$

En posant

$$\frac{s_1}{1} = t_1, \quad \frac{s_2}{2} = t_2, \quad \frac{s_3}{1} = t_3, \ldots$$

les coefficients c^1, c_2, c_3, ... de l'équation peuvent s'exprimer, comme il suit, à l'aide des sommes des puissances semblables des racines

$$c_1 = t_1 C1$$
$$c_2 = -t_2 C1 + t_2 C2$$
$$c_3 = t_3 C1 - t_3 C2 + t_3 C3$$
$$c_4 = -t_4 C1 + t_4 C2 - t_4 C3 + t_4 C4$$

etc., etc.

En substituant ces expressions dans celles de A, N° 11, on trouve

$$A_1 = t_1 C1$$
$$A_2 = t_2 C1 + t_2 C2$$
$$A_3 = t_3 C1 + t_3 C2 + t_3 C3$$
$$A_4 = t_4 C1 + t_4 C2 + t_4 C3 + t_4 C4$$

etc., etc.

Les formules qui expriment C_1, C_2, C_3, ... et A_1, A_2, A_3, ... sont remarquables en ce sens, qu'elles se composent de mêmes termes. Ainsi, lorsque m est impair, on a

$$A_m + c^m = 2\,(t_m C2 + t_m C4 + t_m C6 + t_m C8 + \ldots)$$
$$A_m - c_m = 2\,(t_m C1 + t_m C3 + t_m C5 + t_m C7 + \ldots);$$

et lorsque m est pair,

$$A_m - c_m = 2\,(t_m C2 + t_m C4 + t_m C6 + t_m C8 + \ldots)$$
$$A_m + c_m = 2\,(t_m C1 + t_m C3 + t_m C5 + t_m C7 + \ldots).$$

14. Reprenons les formules du N° 11 et nous aurons pour la répétition générale, c'est-à-dire, pour la répétition du degré m, l'expression suivante

$$1) \ldots (R_r)_m = c_1 \cdot (R_r)_{m-1} - c_2 \cdot (R_r)_{m-2} + c_3 (R_r)_{m-3} - \ldots + \\ + (-1)^{r-1} \cdot c_r \cdot (R_r)^{m-r}$$

tout en ayant soin de rejeter, pour une valeur particulière de m, les termes affectés des répétitions à exposants négatifs, savoir

$$(R_r)_{-1} = 0, \ (R_r)_{-2} = 0, \ (R_r)_{-3} = 0, \ \ldots \ (R_r)_{-(r-)1} = 0 .$$

Cela posé, remplaçons m par $-m$ dans la formule 1) et nous aurons

$$(R_r)_{-m} = c_1 (R_r)_{-m-1} - c_2 (R_r)_{-m-2} + \ldots + (-1)^{r-1} c_r (R_r)_{-m-r}$$

d'où l'on tire

$$c_r (R_r)_{-m-r} = c_{r-1} (R_r)_{-m-r-1} - c_{r-2} (R_r)_{-m-r-2} + \ldots + (-1)^{r-1} (R_r)_{-m}.$$

Posons $m+r=n$, et nous aurons

$$c_r (R_r)_{-n} = c_{r-1} (R^r)_{-n+1} - c_{r-2} (R_r^r)_{-n+2} + \ldots + (-1)^{r-1} (R_r)_{-n+r}.$$

Telle est la récurrence des répétitions à indices négatifs. Nous avons vu, N° 7, que ces expressions n'ont pas d'existence qu'en tant qu'elles peuvent être rattachées aux répétitions proprement dites des inverses de la même somme.

15. Il nous reste à parler de la forme particulière, que prend la répétition, lorsque les lettres qui la composent prennent des valeurs équidifférentes.

Soit

$$(R_{r+1})_m = \frac{a_1^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_1)} + \frac{a_2^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_2)} + \ldots + \frac{a_{r+1}^{m+r}}{\pi_{r+1}(a_{r+1})} ,$$

expression, dans laquelle nous ferons

$$a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ a_3 = 3, \ \ldots \ a_{r+1} = r .$$

Comme on a, dans cette hypothèse

$$\pi_{r+1}(a_1) = (-1)_r \cdot 1.2.3 \ldots r = (-1)^{r-2} \cdot 1^{r/1}$$

$$\pi_{r+1}(a_2) = (-1)^{r-1} \cdot 1.2.3 \ldots (r-1) + 1 = (-1)^{r-2} \cdot 1^{r-1/1} 1.$$

$$\pi_{r+1}(a_3) = (-1)^{r+2} \cdot 1.2.3 \ldots (r-2) + 1.2 + (-1)^{r-3} \cdot 1^{r-2/1} 1.2$$

etc., etc.

en désignant par $E_m(r+1)$ ce que devient $(R_{r+1})_m$, il vient

$$E_m(r+1) = \frac{(-1)^r}{1^{r/1}} \cdot \left\{ 1^{m+r} - rC2 \cdot 2^{m+r} + rC2 \cdot 3^{m+r} + \cdots + \right.$$
$$\left. + (-1)^r \cdot (r+1)^{m-r} \right\}.$$

Or, si on prend la suite, telle que

$$1^{m+r},\ 2^{m+r},\ 3^{m+r},\ \ldots\ (r+1)^{m+r};$$

on a

$$\Delta^r \cdot 1^{m+r} = (-1)^r \cdot \left\{ 1^{m+r} - rC1 \cdot 2^{m+r} + rC2 \cdot 3^{m+r} - \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^r \cdot (r+1)^{m+r} \right\}.$$

Donc,

$$1^{r/1} \cdot E_m(r-1) = \Delta^r \cdot 1^{m+r}$$

Telle est, dans l'hypothèse établie, la forme particulière de $(R_{r+1})_m$ et qu'il s'agissait de faire connaître ici.

16. La nature de la fonction $E_m(r+1)$ nous étant connue, on peut s'en servir pour déterminer $\Delta^r.1^{m+r}$. On a

$$E_0(r+1) = 1;$$

et par suite

$$\Delta^r.1^r = 1^{r/1}$$

Pour $m=1$, on a

$$E_1(r+1) = 1+2+3+\cdots+(r+1 = \frac{r+1}{1} \cdot \frac{r+2}{2}$$

et par suite

$$\Delta^r.1^{1+r} = 1^{r/1} \cdot \frac{r+1}{1} \cdot \frac{r+2}{2}$$

Pour avoir $E_2(r+1)$ employons la formule 1) du N° 9 et il viendra

$$E_2(r+1) = 1+2.3+3.6+4.10+5.15+\cdots+(r-1).\frac{r+1}{1} \cdot \frac{r+2}{2}$$

c'est-à-dire

$$E_2(r+1) = \Sigma(r+1) \cdot \frac{r+1}{1} \cdot \frac{r+1}{2}$$

Or, le second membre de cette dernière égalité revient à

$$\Sigma(r+1) \cdot \overline{r+2}C2 = -2.\Sigma\overline{r+2}C2 + 3.\Sigma\overline{r+3}C3;$$

donc

$$E_2(r+1) = -2.\Sigma\overline{r+2}C2 + 3.\Sigma\overline{r+3}C3 .$$

Pour obtenir les sommes indiquées au second membre, observons que

$$mCn = \overline{m-1}Cn + \overline{m-1}\,\overline{Cn-1}$$

et par suite, lorsqu'on prend la différence dans l'ordre descendant

$$\Delta.mCn = \overline{m-1}\,\overline{Cn-1} ;$$

d'où

$$\Sigma.\overline{m-1}\,\overline{Cn-1} = mCn ,$$

sans y ajouter de constante, puisque ces sortes de fonctions s'évanouissent avec $m=0$. Cela posé, on aura

$$E_2(r+1) = -2.\overline{r+3}C3 + 3.\overline{r+4}C4.$$

Partant

$$\begin{aligned} E_3(r+1) &= \Sigma(r+1).E_2(r+1) \\ &= -2\Sigma(r+1).\overline{r+1}\,C3 + 3.\Sigma(r+1).\overline{r+4}C4 \\ &= 6.\Sigma\overline{r+3}\,C3 - 20.\Sigma\overline{r+4}\,C4 + 15.\Sigma\overline{r+5}\,C5 \\ &= 6.\overline{r+4}\,C4 - 20.\overline{r+5}\,C5 + 15.\overline{r+6}\,C6. \end{aligned}$$

En procédant toujours de la même manière, on aura le tableau suivant

$$\begin{aligned} 1) \ldots E_1(r+1) &= \overline{r+2}\,C2 \\ E_2(r+1) &= -2.\overline{r+3}\,C3 + 3.\overline{r+4}\,C4 \\ E_3(r+1) &= 6.\overline{r+4}C4 - 20.\overline{r+5}C5 + 15.\overline{r+6}C6 \\ E_4(r+1) &= -24.\overline{r+5}C5 + 130.\overline{r+6}\,C6 - 210.\overline{r+7}\,C7 \\ &\quad + 105.\overline{r+8}\,C8, \text{ etc., etc. . . .} \end{aligned}$$

On voit que, dans la construction de ces expressions, le tout dépend des coefficients numériques suivants

1
2 . 3
6 . 20 . 15
24 . 130 . 210 . 105
120 . 924 . 2380 . 2520 . 945
720 . 7308 . 26432 . 44100 . 34650 . 10395
etc., etc. . . .

Ces nombres jouissent de la propriété suivante. En désignant

les termes de la n^e ligne par a, b, c, d, . . . ceux de la $(n+1)^e$ seront

$$n\,.\,a,\ (n+1)\ (a+b),\ (n+2)\ (b+c),\ (n+3)\ (c+d),\ \ldots$$

On peut aussi mettre les fonctions E sous la forme suivante :

2) . . . $E_1\,(r+1) = \overline{r+2}\,C2$

$E_2\,(r+1) = \overline{r+3}\,C3 + 3\,.\,\overline{r+3}\,C4$

$E_3\,(r+1) = \overline{r+4}\,C4 + 10.\,\overline{r+4}\,C5 + 15.\,\overline{r+4}\,C6$

$E_4\,(r+1) = \overline{r+5}\,C5 + 25.\,\overline{r+5}\,C6 + 105.\,\overline{r+5}\,C7 + 105.\,\overline{r+4}\,C8$

etc, etc. . . .

Les coefficients numériques de ces expressions présentent le tableau suivant :

1

1 . 3

1 . 10 . 15

1 . 25 . 105 . 105

1 . 56 . 480 . 1260 . 945

etc., etc. . . .

Ces nombres jouissent de la propriété suivante. En désignant par a, b, c, d, etc., etc. . . . les termes de la n^e ligne; ceux de la $(n+1)^e$ s'obtiendront en employant les deux lignes suivantes

$$a,\ 2b,\ 3c,\ 4d,\ \ldots$$
$$(n+2)a,\ (n+3)b,\ (n+4)c,\ \ldots$$

et en ajoutant par colonnes. Ainsi, les nombres de deux lignes successives mises en regard, sont

$1,\ b,\ c,\ d,$ etc. . . .

$1,\ n+2\ (1+b),\ nb+3\ (b+c),\ nc+4\ (c+d),$ etc. , . .

III. — *Méthode infinitésimale en Géométrie*,

PAR

J.-N. NOËL,

PROFESSEUR ÉMÉRITE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Ce Mémoire a pour but de prouver directement, par l'étude approfondie des notions premières, que le choix de *bonnes* définitions et l'emploi *explicite* des grandeurs infinitésimales sont les seuls moyens de donner, aux théories de la Géométrie élémentaire, toute la clarté, la simplicité et la complète exactitude logique dont elles sont susceptibles.

Les définitions et les théories modifiées sont ici développées telles qu'elles devraient figurer désormais dans les éléments de Géométrie. On a d'ailleurs résolu toutes les difficultés dont ces définitions et ces théories ont été l'objet.

De la Ligne droite et des Angles.

Ligne droite. — Parmi les définitions de la ligne droite, je pense toujours qu'on doit préférer la suivante :

On appelle *ligne droite*, ou simplement *droite*, le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, c'est-à-dire la plus courte de toutes les lignes joignant le premier point au second.

Il est clair d'abord que pour décrire le plus court chemin du point A au point B, le point mobile partant de A, doit tendre et se mouvoir *constamment*, c'est-à-dire *sans aucun détour*, vers le point fixe B et finir par coïncider avec ce dernier. Or, de là résulte cette *définition descriptive*, due à M. Lamarle :

La droite est la trace d'un point qui tend et se meut constamment vers un même point fixe (soit que le point mobile atteigne ou n'atteigne pas ce dernier). Cette tendance constante s'appelle la *direction* du point mobile ; et c'est aussi la *direction* de la droite décrite. De sorte que *la droite est une ligne de direction constante.*

Un fil *tendu* donne l'idée exacte d'une ligne droite ; car il est évidemment plus court que le fil *non tendu*, ayant les mêmes extrémités.

Propriétés de la droite. — 1° Puisque la propriété *caractéristique* de la droite AB est d'être le plus court chemin pour aller du point A au point B, on voit que cette droite exprime la *vraie distance* entre les deux points extrêmes A et B, d'ailleurs aussi *éloignés* l'un de l'autre qu'on veut le supposer. Il existe donc une infinité de droites de *longueurs* différentes.

2° *Du point* A *au point* B, *il n'y a qu'une seule ligne droite.* Car s'il pouvait y en avoir deux, le point qui décrirait la seconde, devant partir du point A et se mouvoir constamment vers le point fixe B, jusqu'à coïncider avec celui-ci, passerait nécessairement par toutes les positions du point *générateur* de la première droite. Les deux droites auraient donc tous leurs points communs et se confondraient en une seule. Ainsi *deux droites coïncident, aussi bien que leurs milieux, dès qu'elles ont les mêmes extrémités ;* et l'une n'est ni plus ni moins *droite* que l'autre.

3° *Lorsque deux droites ont deux points communs, elles coïncident dans toute leur étendue indéfinie et n'en font qu'une seule.* — D'abord, entre les deux points communs A et B les deux droites n'en font qu'une (2°). Ensuite, supposons qu'étant *prolongées* elles puissent se séparer en un point C, l'une devenant ACD et l'autre ACE. Dans cette hypothèse, il est clair que la seconde droite restant fixe, on peut faire tourner la première autour du point fixe A et amener le point D sur un point F de la seconde droite. Il y aurait donc alors, du point A au point F, deux droites différentes ; chose impossible (2°). Donc les deux droites proposées ne peuvent se séparer en aucun point de leurs prolongements et coïncident dans tous leurs points.

4° Une droite peut se prolonger autant qu'on veut dans les deux sens, mais dans chaque sens elle ne peut avoir qu'un seul prolongement *indéfini*, s'il n'est pas *donné*.

5° Deux points suffisent pour déterminer la *direction* ou la *position* d'une droite dans l'espace ; c'est-à-dire que, *par deux points donnés, on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite.*

6° Enfin, *deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point;* lequel est dit leur point de *rencontre*, d'*intersection* ou de *concours*.

De l'angle. — J'appelle *angle* la portion plane indéfinie dont deux droites, issues d'un même point, sont *écartées* l'une de l'autre, quant à leur *position* sur le plan. Ce point est le *sommet* de l'angle et les deux droites en sont les *côtés*.

L'angle formé par les deux droites AB et AC, se désigne par la lettre A du sommet quand il est seul, et dans le cas où il n'est pas le seul qui ait le sommet A, on emploie les trois lettres, celle du sommet étant au milieu, et l'on dit : l'angle BAC ou l'angle CAB.

L'angle est donc une figure plane rectiligne de deux côtés, *ouverte* et *indéfinie* dans le sens de l'*ouverture*. On voit de plus que l'*écartement* des deux côtés en produit l'*ouverture*, et réciproquement.

Génération de l'angle. — L'angle est *nul* quand ses deux côtés coïncident ; car alors ils ne sont ni *écartés* l'un de l'autre, ni *ouverts*. — Supposons que le côté AB restant fixe, le côté AC, d'abord sur AB, s'en *écarte* ensuite en tournant sur le plan autour du sommet fixe A. Dans ce mouvement, le côté AC décrit successivement une infinité d'angles *plans*, lesquels croissent ou augmentent par angles ou écarts *invisibles*, excessivement petits, jusqu'à ce que AC, s'arrêtant dans une position, ait décrit l'angle cherché BAC. Celui-ci est donc bien l'angle tel qu'il est défini plus haut.

Si le côté AC, continuant à tourner autour du point fixe A, revient sur la position AB qu'il a d'abord quittée, ce côté AC a fait une *révolution* autour du point A et a décrit l'*espace angulaire* plan, lequel est évidemment le même autour de chaque point du plan proposé.

Grandeur de l'angle. — Puisque l'angle est une figure plane

indéfinie de deux côtés, sa *grandeur* ne dépend aucunement des longueurs *arbitraires* données aux deux côtés pour désigner cette figure ; car on peut prolonger chacun de ces côtés autant qu'on le veut sans que l'angle cesse d'être la même portion plane indéfinie. Donc l'*angle est déterminé complètement dès que le sommet et un point sur chaque côté sont donnés ;* car alors les deux côtés sont déterminés de position et peuvent se tracer.

La *grandeur* de l'angle dépend uniquement de l'*ouverture* ou de l'*écartement* de ses deux côtés : l'angle augmente ou diminue avec chacune de ces deux choses; et il est toujours une fraction, exprimable ou inexprimable en chiffres, de l'espace angulaire plan autour du sommet.

On voit d'ailleurs qu'un angle peut être la *somme* ou la *différence* de deux autres; être le *double*, le *triple*, le *quadruple*,... d'un autre, ou en être la *moitié*, le *tiers*, le *quart*, les *trois cinquièmes*, etc.

Enfin, le seul aspect de l'angle tracé sur le plan met à la portée de tous les élèves, et rend complètement évidente, la double propriété caractéristique de cet angle, savoir : d'être une portion plane *indéfinie* ou sans *limite*, sans *fin*, dans le sens de l'ouverture, et d'être d'autant plus *grand* que cette ouverture est plus grande elle-même, c'est-à-dire que ses deux côtés sont plus écartés l'un de l'autre sur le plan.

Angles opposés au sommet. — Deux angles sont dits *opposés au sommet* lorsque les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Lorsque deux droites AB *et* CD *se coupent en un point* O, *les angles opposés au sommet* O *sont égaux entre eux* (fig. 1).

D'abord les deux espaces ACB et CBD sont égaux, comme moitié chacun du même espace angulaire plan autour du point O. Retranchant de part et d'autre la partie commune COB, il reste l'angle AOC = BOD. On verra de même que l'angle AOD est égal à son opposé BOC.

Des angles droits. — On appelle *angle droit* chacun des deux angles *adjacents* égaux AOC et COB, formés par la droite CO avec la droite AB (fig. 2).

Prolongeant CO en D, il est clair que l'angle AOD est égal à l'angle droit BOC, comme opposé au sommet O. Par la

même raison, l'angle BOD est égal à l'angle droit AOC. Donc les quatre angles en O sont égaux et droits; chacun d'eux est donc le quart de l'espace angulaire plan autour du point O. Donc *tous les angles droits séparés sont égaux entre eux*, comme quarts respectifs d'espaces angulaires plans égaux.

Corollaires. — Tous les angles consécutifs, formés sur le plan autour du point O, composent l'espace angulaire autour de ce point *et valent ensemble quatre angles droits.* — De plus, puisque chaque espace angulaire plan vaut quatre droits, sa moitié vaut deux angles droits. Donc, si d'un point O de la droite AB, on mène, d'un même côté de celle-ci, tant de droites qu'on voudra, la somme de tous les angles résultants, formant le demi-espace angulaire plan, vaut deux angles droits. — En particulier, *si une droite* CO *s'arrête au point* O *de la droite* AB (fig. 1), *elle forme avec celle-ci les deux angles adjacents* COA *et* COB *dont la somme est égale à deux droits.* — Réciproquement, etc.

Remarque. — Je n'ai pas à établir ici toutes les proportions connues, relatives aux droites se coupant en un même point, ni à rappeler les dénominations des angles comparés à l'angle droit ou deux à deux. — Quant aux intersections de trois droites situées dans le même plan, elles donnent lieu aux deux théorèmes fondamentaux que nous allons considérer.

Théorème I. — *Si dans le même plan, les deux droites* AB *et* CD, *se coupant en* O, *rencontrent une même troisième* EF *aux deux points* G *et* I, *l'angle extérieur ou externe* EGB *est toujours plus grand que l'angle interne correspondant* EID (fig. 3).

1re *Démonstration.* — D'abord les deux surfaces indéfinies DOB et AOC sont égales entre elles, comme opposées au sommet O; donc la première surface est plus grande que GIO, partie limitée de la seconde. Or, les deux surfaces indéfinies EGB et EID ont la partie commune EGOD; mais la seconde partie DOB de la première est plus grande que la seconde partie GIO de la seconde. Donc la première surface EGB est plus grande que la seconde EID; c'est-à-dire que l'angle externe EGB est plus grand que l'angle interne correspondant EID.

2me *Démonstration.* — L'angle EGB restant fixe, supposons

que l'angle EID glisse sur le plan, de telle sorte que le côté IE glisse sur FE et que le sommet I s'avance vers le sommet G. Dans ce mouvement, comme la droite ID ne peut jamais avoir qu'un seul point sur la droite GB, ce point O s'avance vers le point G et y parvient en même temps que le point I. L'angle mobile EID occupe donc alors la position EGH, et il est une partie de l'angle EGB. Donc l'angle EGB > EID.

Théorème II. — Réciproquement, *si l'angle externe* EGB est *plus grand que l'angle interne correspondant* EID, *les deux côtés non communs* GB *et* ID *se rencontreront toujours étant suffisamment prolongés* (fig. 4).

1re *Démonstration.* — D'abord les deux angles ne changent pas quand on prolonge leurs côtés autant qu'on le veut. Ensuite, bien que la surface indéfinie EGB ne soit encore qu'en partie tracée dans la surface indéfinie plus petite EID, elle ne peut évidemment rester contenue dans cette dernière; et, en prolongeant leurs côtés, elle en sortira nécessairement. Or, l'angle EGB ne peut sortir de l'angle plus petit EID ni par EF, limite commune, ni dans le sens indéfini des ouvertures; donc il en sortira par les deux côtés non communs GB et ID, lesquels se couperont toujours étant suffisamment prolongés.

2me *Démonstration.* — L'angle EGB étant plus grand que l'angle EID, celui-ci n'en est qu'une partie EGH. De plus, l'angle EGB restant fixe, supposons que l'angle EGH glisse sur le plan, de telle sorte que le côté EG glissant sur la droite fixe EF, le sommet G s'avance vers le sommet I. Dans ce mouvement, la droite indéfinie GH ne pouvant jamais avoir qu'un seul point sur la droite indéfinie GB, ce point X, d'abord en G, s'en éloigne de plus en plus jusqu'à ce que le sommet G soit arrivé en I. Et comme alors l'angle EGH coïncide avec son égal EID et GH avec ID, on voit que les deux droites GB et ID, suffisamment prolongées se coupent au point X ci-dessus. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — Si l'angle externe AGE était plus petit que l'angle interne CIE, il est clair que comme les angles opposés au sommet sont égaux, l'angle externe FID serait plus grand que l'angle interne correspondant FGB, et qu'ainsi les prolongements de ID et de GB finiraient toujours par se couper. On voit que *dans le même plan, si deux droites font avec une*

même troisième deux angles correspondants inégaux entre eux, ces deux droites finissent toujours par se rencontrer, d'un côté ou de l'autre étant suffisamment prolongées.

Remarque. — Nous donnons, de chacun des deux théorèmes fondamentaux, deux démonstrations également très-simples, fort claires et complètement exactes. Le premier théorème sert à démontrer toutes les propositions relatives au *parallélisme* de deux droites situées dans un même plan ; tandis que le second théorème, *postulatum d'Euclide*, ou plutôt le corollaire ci-dessus démontre toutes les propriétés des *parallèles*. Enfin, pour ces deux théorèmes, la *théorie des parallèles*, l'une des plus importantes de la Géométrie, devient rigoureuse et la plus simple possible.

Considérations sur le Postulatum d'Euclide.

Dans une brochure publiée en 1856, M. Lamarle démontre le théorème *postulatum d'Euclide*, mais ramené aux *postulats* de Lacroix et de M. Gergonne. Dans cette brochure, on lit, p. 6 et 7 : « La démonstration que je viens d'analyser n'est pas rapide et brève comme tant d'autres : elle est exacte.... La condition essentielle est l'exactitude. C'est en cela que pèchent les démonstrations antérieures. Leur simplicité ne remédie point à ce vice capital. En vain voudrait-on les justifier, sous prétexte qu'elles conduisent au but sans retard et sans peine. Si simples qu'elles soient, le *postulatum d'Euclide*, admis sans démonstration, est plus simple encore. Mieux vaut d'ailleurs, se tenir à ce postulatum que de prétendre y suppléer par des semblants de démonstration, d'autant plus dangereux qu'ils se présentent avec plus de simplicité. »

Les démonstrations plus haut des deux théorèmes fondamentaux (dont le second est celui d'Euclide) sont très-simples et complètement exactes, comme reposant sur des notions claires et bien établies. Ce ne sont donc pas des *semblants de démonstration*, car aucune démonstration géométrique ne produit une certitude plus complète. En quoi, d'ailleurs, leur simplicité serait-elle dangereuse ?

Si la démonstration obscure et fort compliquée de M. Lamarle était la seule exacte, il faudrait bien admettre le postulatum

d'Euclide comme une vérité évidente, et encore faudrait-il quelques explications aux élèves pour leur faire comprendre cette vérité. Mais supprimer toute démonstration ou toute preuve, ce n'est pas simplifier, au contraire, car c'est laisser ignorer les éléments de conviction par lesquels ce postulatum devient une vérité certaine ; et c'est faire douter de l'existence de cette vérité.

D'ailleurs, l'exactitude complète d'un *postulat* peut toujours être contestée, parce que ce postulat n'a pas tous les degrés d'évidence d'un véritable axiôme. On voit donc pourquoi les auteurs, qui tiennent à faire de la Géométrie une science de définitions et de pures déductions logiques, ont cherché une démonstration à la fois simple et rigoureuse du théorème d'Euclide, base de la théorie des parallèles la plus claire et la plus complètement exacte.

Cette démonstration, placée au commencement de la Géométrie, doit être très-élémentaire; et comme elle dépend essentiellement de l'angle de deux droites qui se rencontrent, elle n'a pu se donner tant que cet angle n'a pas été clairement défini.

L'angle de deux droites est, en effet, resté absolument inconnu, même en l'appelant *inclinaison*, *écartement* ou *ouverture* des deux droites, tant qu'on l'a regardé comme une quantité *sui generis*, n'étant ni une ligne, ni une surface, ni un volume, c'est-à-dire ne pouvant se trouver parmi les grandeurs géométriques. On conçoit que cette notion obscure et même absurde de l'angle n'ait pu servir à démontrer le théorème d'Euclide, malgré les tentatives nombreuses qui en ont été faites; vu que ce théorème dépend essentiellement de grandeurs que la Géométrie considère.

Mais si, avec Bertrand de Genève, Lacroix, Legendre, Francœur, M. Vincent, etc., on considère l'angle tel qu'il est en effet, savoir : la portion plane indéfinie *écartement* de deux droites issues d'un même point, on peut démontrer, comme on l'a vu plus haut, avec clarté, simplicité et complète exactitude, le théorème d'Euclide.

Cette démonstration est développée, à l'aide d'un mouvement de glissement d'un certain angle, dans les éléments de Géométrie de J. Schwab, dont la première partie, imprimée à Nancy,

en 1813. C'est au fond la seconde démonstration donnée plus haut du théorème II ; et M. Terquem la regarde comme la plus simple et la plus exacte.

Dans les éditions successives du Traité de Géométrie, dont la première en 1830, j'ai donné une autre démonstration, non moins simple ni moins rigoureuse que la précédente, mais en y rendant plus explicite l'emploi des propriétés de l'angle. C'est à quelques développements près, la première démonstration du théorème II plus haut.

La même démonstration, très-peu modifiée, se trouve aussi dans les traités de géométrie de MM. Wezel et Catalan, publiés depuis 1835, ainsi que dans la 3^{me} édition du Cours de Géométrie de M. Bobillier, Châlons, 1839. Je n'ai pas connu les deux premières éditions.

Quant au premier théorème fondamental ci-dessus, je l'ai énoncé et démontré en 1835, 2^{me} édit. de la Géométrie, pour simplifier la théorie des parallèles.

Enfin, Legendre dans la Note II de ses Éléments de Géométrie, 12^{me} édition, démontre complètement le postulatum d'Euclide, ramené à celui de Lacroix.

Toutes ces démonstrations sont fondées sur la véritable définition, celle qui fait le mieux connaître l'angle plan. Cette définition, énoncée plus haut, est simple, claire, précise et évidente comme un axiôme ; par suite elle est la base exacte de l'enseignement le plus simple et le plus clair de la Géométrie.

M. Lamarle nie que le théorème d'Euclide soit démontré par le procédé que j'ai employé plus haut ; et voici comment il le prouve (p. 341 des *Annales de l'enseignement public*, 1857) : « Le procédé de M. Noël n'est pas nouveau, mais il est simple, trop simple même et surtout trop fécond. Pour s'assurer de sa fécondité trop grande, il suffit de l'appliquer littéralement au cas de deux droites qui en coupent une troisième sous des angles égaux. Il conduit, comme tout à l'heure, à la même conséquence et prouve ainsi que les parallèles se rencontrent. C'est aller trop loin. »

M. Lamarle ne donnant pas d'autre développement à l'objection précédente, on ignore comment il applique *littéralement* le procédé. Mais cette application ne saurait prouver qu'il y a rencontre. — Si en effet les deux droites se coupaient, l'angle

externe serait plus grand que l'angle interne correspondant; ce qui est contre l'hypothèse.

Mr A.-L. M. est beaucoup plus explicite dans ses objections. Mais les raisonnements erronés par lesquels il croit démontrer les deux théorèmes absurdes de la page 378 des *Annales de l'enseignement*, ne sont pas *littéralement* les mêmes, ni fondés sur les mêmes notions, que ceux démontrant les deux théorèmes fondamentaux; ils ne peuvent donc infirmer aucunement la rigoureuse exactitude de ces derniers théorèmes, et ils la confirment, au contraire, ainsi que je vais l'établir.

1°. — Puisque dans le même plan les deux parallèles AB et CD (fig. 5), coupées en G et I par la sécante EF, ne peuvent jamais se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge, il s'ensuit que la surface indéfinie DIGB, comprise entre les deux droites illimitées ID et GB, n'est pas un angle; car ce n'est pas la surface indéfinie comprise entre deux droites issues d'un même point. Or, la surface indéfinie DIGB n'étant pas un angle, ne peut aucunement faire partie de l'angle DIE. Il est donc absurde d'en conclure que l'*angle* DIE *est plus grand que l'angle* BGE.

D'ailleurs, en retranchant DIGB de l'angle DIE, on n'en soustrait pas un angle; donc alors l'angle DIE ne diminue pas pour devenir BGF, c'est-à-dire que les deux angles correspondants DIE et BGE sont égaux entre eux. En un mot, l'angle BGE est l'une des positions de l'angle DIE glissant sur le plan suivant IE.

Enfin, si l'angle DIE était plus grand que l'angle BGE, l'angle opposé CIF serait aussi plus grand que l'angle AGF; donc en vertu du second théorème fondamental, les deux droites IC et GA finiraient par se rencontrer; ce qui est contre l'hypothèse.

2°. — Si les deux angles DIE et BGE sont égaux, c'est-à-dire si les deux surfaces indéfinies DIE et BGE sont égales, comme pouvant coïncider, la seconde surface BGE n'est donc pas une partie de la première, vu qu'elle lui est égale. Il n'y a donc aucune compensation à établir, et il est absurde d'en conclure que *les deux droites* GB *et* ID *prolongées se rencontreront.*

D'ailleurs, si ces deux droites se coupaient, il résulte du premier théorème fondamental que l'angle externe EGB serait

plus grand que l'angle interne correspondant EID, contrairement à l'hypothèse d'où l'on est parti.

Si dans le tome XVI des *Annales de Mathématiques*, M. Gergonne trouve des inconvénients à *regarder l'angle comme la portion plane indéfinie dont les deux côtés sont écartés l'un de l'autre*, c'est qu'il suppose que *la surface indéfinie* DIGB *fait partie de l'angle* DIE ; supposition absurde, comme on vient de le voir, et qui rend absurdes les raisonnements fondés sur cette supposition.

Observons de plus que l'angle étant déterminé complètement dès que le sommet et un point sur chaque côté sont donnés, il s'ensuit que dans tout polygone rectiligne plan *fermé*, la surface appartient à la fois à la portion limitée de chacun de ses angles. Ce qui résout je ne sais trop quelle difficulté opposée à l'emploi de l'angle comme surface plane indéfinie.

Enfin, il est certain que l'angle est toujours employé, dans les éléments de Géométrie, tel qu'il est en effet, *une portion plane indéfinie*, laquelle exprime l'*écartement* de ses deux côtés ou leur ouverture. Car deux droites qui se coupent sont toujours dans un même plan et comprennent entre elles quatre angles ou quatre portions illimitées de ce plan.

Observons d'ailleurs que si, par le point O de la droite AB, on mène l'*oblique* OE à cette droite, de telle sorte que l'angle BOE soit aigu ; l'oblique étant alors plus rapprochée du point B que du point A, elle est *inclinée* vers B sur AB. De sorte que l'*angle aigu* BOE *exprime l'inclinaison de* OE *sur* AB. Mais l'inclinaison est d'autant plus grande que l'angle d'inclinaison est plus petit : s'il est *nul*, l'inclinaison est à son maximum ; tandis que s'il est *droit* l'inclinaison est *nulle*, c'est-à-dire qu'alors OE n'incline ou ne penche sur AB ni vers A ni vers B.

Des grandeurs infinitésimales.

Ces grandeurs sont regardées comme purement chimériques par M. Lamarle ; et, page 541 des *Annales de l'enseignement*, il affirme que :

« 1°. L'existence de grandeurs autres que les grandeurs finies est purement chimérique. »

« 2°. Si pour définir l'angle, si pour démontrer le postulatum d'Euclide, on a recours à des grandeurs dites *infiniment grandes* et supposées *non finies*, on sort du domaine de la réalité et l'on fait de la Géométrie fantastique. »

« 3°. La croyance aux *infiniment petits* est purement illusoire. »

« En l'insinuant aux élèves, *on altère chez eux ce bon sens droit et sûr qui ne vit que de choses communes, cette raison sage et modérée qui répugne aux chimères.* »

Tant que M. Lamarle n'aura pas démontré les trois propositions précédentes, qu'il pose comme des vérités généralement admises par *tous* les géomètres, on en pourra contester l'exactitude. Ces propositions ne sont nullement prouvées par la Note de M. Lamarle sur l'emploi de l'infini dans les Mathématiques élémentaires, à laquelle il renvoie pour cet effet. D'ailleurs ces preuves sont impossibles, car les *grandeurs infinitésimales* ont une existence certaine, ainsi que nous l'avons établi ailleurs et dont voici plusieurs preuves.

I. — D'abord une quantité, continue ou non, est dite *infiniment grande* ou simplement *infinie* lorsqu'elle surpasse toute quantité de même nature, *donnée* ou simplement *imaginée*, quelque grande que soit cette dernière.

Par exemple, on peut concevoir que la droite, dont on n'a qu'une seule extrémité, soit prolongée sans cesse et toujours. Donc cette droite n'est jamais *finie*, dans son état le plus général, n'ayant qu'une seule extrémité : elle est alors *infinie*, car sa longueur surpasse toute longueur *assignée*, si grande que soit cette dernière.

De même, on ne peut jamais compter toutes les fractions possibles plus grandes que l'unité, depuis 1 exclu jusqu'à 2 inclus, car ce nombre surpasse tout nombre imaginé, si grand que soit ce dernier. Ce nombre de fractions est donc *infini* et toujours inconnu. — Dans le calcul, on le désigne par une lettre, et plus spécialement par un *huit renversé* : ∞, qu'on énonce *infini* ou *nombre infini*.

Cela posé, il est clair que les nombres de toutes les fractions possibles, plus grandes que l'unité, depuis 1 exclu jusqu'à 2, 3, 4, 5, 6,..., n inclus, sont nécessairement

$$\infty\ ,\ 2\infty\ ,\ 3\infty\ ,\ 4\infty\ ,\ 5\infty\ ,\ \ldots\ ,\ (n-1)\infty\ .$$

On voit qu'*un nombre infini peut être un multiple quelconque fini d'un autre nombre infini ou en être une fraction quelconque assignée.* Par exemple, il est clair que 3∞ = les $\frac{3}{5}$ de 5∞.

II. — Un *infiniment petit* est la grandeur moindre que toute grandeur de même nature, *donnée* ou *assignée*, si petite que soit cette dernière, sans être nulle; car le *néant* n'est pas une grandeur. Un infiniment petit est donc une fraction dont le numérateur, *nombre*, *ligne* ou *angle*, est donné et dont le dénominateur est un nombre entier infini.

Cette fraction, en effet, toujours inconnue et jamais nulle, est évidemment moindre que toute fraction assignée, ayant le même numérateur, et dont le dénominateur est un nombre *donné* ou *fini*, si grand qu'il soit. — On voit d'ailleurs qu'en prenant le dénominateur donné de plus en plus grand, la fraction assignée devient de plus en plus petite et approche de plus en plus de la fraction infiniment petite proposée. Donc cette dernière fraction existe nécessairement, car on ne saurait approcher de ce qui n'existe pas.

Si donc on conçoit la droite donnée AB divisée en un nombre infini de parties égales, chaque partie est infiniment petite, sans être nulle, et de plus elle est absolument *invisible*. Car elle est beaucoup plus petite que la billionième partie du mètre, par exemple; et déjà cette dernière partie échappe à l'œil armé du plus fort instrument d'optique.

Observons encore que toutes les fractions possibles, plus grandes que l'unité, depuis 1 exclu jusqu'à 2 inclus, croissent successivement d'une même différence d, telle qu'on a $d \times \infty = 1$ et $d = \frac{1}{\infty}$. Cette différence est donc *infiniment petite*.

De là résulte que *tous les termes de ces fractions sont infinis*. Mais l'une d'elles se réduit à $\frac{3}{2}$; il faut donc que ses deux termes aient un facteur infini commun, contenu 3 fois et 2 fois au numérateur et au dénominateur.

III. — Maintenant, pour que la démonstration plus haut du théorème d'Euclide soit complètement générale, il faut qu'elle s'applique encore lorsque l'angle externe surpasse *infiniment peu* l'angle interne correspondant. Mais alors *les deux côtés non communs se rencontrent à l'infini*. — D'abord ils se rencontrent nécessairement. Ensuite, il est facile de voir, par une parallèle menée du sommet de l'angle interne, que les deux côtés non communs font entre eux un angle infiniment petit égal

à l'excès de l'angle externe sur son correspondant. Il faut donc que le sommet de cet angle infiniment petit soit infiniment éloigné.

Ainsi, *on ne sort pas de la réalité et l'on ne fait pas de la Géométrie fantastique*, comme M. Lamarle le prétend, en employant la véritable définition de l'angle plan, énoncée plus haut.

IV. — Il est certain qu'on ne pourra jamais *compter* ni *calculer* toutes les fractions possibles, plus grandes que l'unité, depuis 1 exclu jusqu'à 2 inclus. Mais s'ensuit-il que le nombre *infini* de ces fractions et leur différence constante *infiniment petite* n'existent pas? On pourrait donc ainsi nier l'existence de la *racine carrée* du nombre 3, que l'on démontre être une fraction irréductible *finie*, comme étant comprise entre 1 et 2, mais à termes *infinis* et qui sera toujours inconnue.

Soient A et B deux grandeurs *finies* de même nature, telles que deux droites ou deux arcs circulaires de même rayon. Supposons que la fraction à termes infinis précédente soit le *rapport* de A à B : on démontre alors que les deux grandeurs finies A et B n'ont pas d'autre *commun diviseur*, d'autre *commune mesure*, qu'une longueur *infiniment petite*, et sont alors dites *incommensurables entre elles*. — Ce qui prouve d'ailleurs que le rapport et le commun diviseur ci-dessus existent, c'est qu'on peut approcher de l'un et de l'autre autant qu'on le veut.

L'emploi des infiniment petits est donc inévitable et parfaitement logique pour démontrer directement, et par un seul raisonnement très-simple, l'égalité de deux rapports quelconques entre quantités continues : c'est *la méthode des parties égales*. Cet emploi ne peut donc « *altérer chez les élèves ce bon sens droit et sûr qui ne vit que des choses communes*,.... » Au contraire, il évite le *non-sens* qui aurait lieu si l'on disait, avec M. Lamarle, que *les grandeurs incommensurables n'ont point de commune mesure*.

V. — La distinction des deux cas *commensurable* et *incommensurable* est un *non-sens* ou une *pétition de principe*, que la méthode des parties égales évite complètement, en rendant la démonstration rigoureuse la plus simple possible. Mais l'*axiôme de mesurage*, pour établir la *proportion*, est plus simple encore en ce qu'on ne s'y préoccupe d'aucune commune mesure, né-

cessairement sous-entendue, absolument comme dans le troisième procédé moins simple que voici :

Soient A et B deux angles aux centres de deux cercles égaux, a et b les arcs interceptés par leurs côtés : il faut démontrer qu'on aura toujours $A : B = a : b$.

Pour cet effet, concevons l'arc b divisé en un grand nombre entier p de parties égales à x : il est clair que cette partie x sera contenue le nombre entier n de fois dans a, avec un reste plus petit que x, lequel sera désigné par kx, le nombre k étant moindre que l'unité. On aura donc en même temps

$$b = px \text{ et } a = nx + kx ;$$

d'où en supprimant le facteur x, il vient

$$a : b = \frac{n}{p} + \frac{k}{p}.$$

Les rayons menés aux points de division des arcs b et a divisent les angles B et A en p et n parties égales à y, comme ayant leurs arcs égaux à x. De sorte que l'angle y, contenu p fois dans B, est contenu n fois dans A, avec un reste vy, le nombre v étant plus petit que l'unité. On a donc

$$B = py \text{ et } A = ny + vy ;$$

$$\text{d'où } A : B = \frac{n}{p} + \frac{v}{p}.$$

Cette égalité et la précédente donnent évidemment

$$A : B - a : b = \frac{v - k}{p}.$$

Cette dernière égalité est vraie pour des nombres p de plus en plus grands, ce qui à cause de $v - k < 1$, rend le second membre de plus en plus petit. Or, le premier membre est constant ; il doit donc en être de même du second, cependant toujours variable avec p, à moins que ce second membre ne soit nul. Il faut donc que $v - k = 0$; d'où $v = k$ et

$$A : B = a = b.$$

Ce troisième procédé est rigoureux et général ; il est fondé sur la *méthode des variables*, mais il est beaucoup moins simple que les méthodes des parties égales, pour démontrer la proportion en Géométrie et en Mécanique, la commune mesure

étant toujours assignable ou inassignable, finie ou infiniment petite. De sorte qu'il y a toujours un commun diviseur aux deux termes du rapport le plus facile à déterminer et auquel est comparé l'autre rapport pour démontrer qu'ils sont égaux.

VI. — Revenons encore à la notion des infiniment petits. M. Lamarle prétend que « si l'élève à qui on en parle, objectait qu'il ne les comprend pas, le professeur serait obligé de convenir qu'il ne les entend pas davantage. »

Cela arriverait sans doute, si le professeur ne connaissait pas la définition des infiniment petits et les preuves de leur existence, données plus haut. Dans le cas contraire, il lui suffira de répéter la définition et les preuves pour que les élèves comprennent ce que c'est qu'un infiniment petit, et pour qu'ils sachent que cet infiniment petit est toujours invisible et de grandeur inconnue, comme étant moindre que toute quantité de même nature, donnée ou assignée, si petite que soit cette dernière.

Il ne peut donc s'agir ici que de l'existence des infiniment petits. — « Or, on est conduit nécessairement à l'idée des infiniment petits, lorsque l'on considère les variations successives d'une quantité soumise à la loi de continuité. Ainsi le temps croît par degrés moindres qu'aucun intervalle qu'on puisse assigner, quelque petit qu'il soit. Les espaces parcourus par les différents points d'un corps croissent aussi par infiniment petits. » (Mécanique de Poisson, 2^{me} édit., Tome I, page 14)

En général, le point générateur de la droite AB part de la position A pour se rendre à la position B *en passant par toutes les positions intermédiaires.* Et puisque le mouvement du point est *continu*, la seconde position est *immédiatement consécutive* à la première, la troisième à la seconde, et ainsi à l'infini. Or, l'intervalle, qui sépare deux positions immédiatement consécutives n'est pas rigoureusement nul; car, si cela était, comme le point n'a pas d'étendue, les deux positions se confondraient en une seule, et il n'y aurait pas eu de mouvement. Cet intervalle existe donc; mais, provenant du plus petit mouvement possible, on doit le considérer comme le plus petit de tous les infiniment petits.

En objectant que cet infiniment petit serait un *indivisible*, on a sans doute voulu nier, contrairement à des faits certains, l'existence des couples de positions immédiatement consécutives.

Cette objection ne prouve donc rien contre l'existence de l'infiniment petit ci-dessus. D'ailleurs, il est évident que le point générateur d'une ligne décrit successivement toutes les longueurs infiniment petites croissantes, à partir de la plus petite possible, avant d'avoir décrit la longueur finie proposée.

Enfin, si A et B sont deux droites données ou deux arcs circulaires de même rayon ; l'intervalle entre deux positions immédiatement consécutives du point générateur de chaque ligne est nécessairement le même pour chacune ; cet intervalle est donc *commun diviseur* de A et B. On conçoit que ces deux lignes peuvent avoir un commun diviseur infiniment petit, multiple du précédent ; elles ont donc toujours un commun diviseur fini ou infiniment petit, ainsi qu'on l'a déjà prouvé plus haut.

Des lignes courbes et Théorèmes résultants.

Définition. — Le caractère essentiel de toute *courbe* tracés est que : *aucune de ses parties visibles et appréciables n'est une ligne droite.* Cette courbe peut donc avoir des parties rectilignes infiniment petites, toujours invisibles. C'est précisément ce qui résulte de la définition descriptive, due à M. Lamarle et que voici :

« *La courbe est la trace d'un point qui se meut suivant une direction incessamment variable.* »

D'abord la *continuité* exige que la direction varie par degrés insensibles ou par angles infiniment petits, appelés *angles de courbure.* Car, si l'un des angles successifs avait une valeur finie et visible, le sommet de cet angle serait un *point de rebroussement*, et la continuité cesserait en ce point. — Ensuite, il est certain que le point se meut et ne peut se mouvoir qu'infiniment peu suivant chacune des directions successives ; il décrit donc une infinité de droites infiniment petites et invisibles, appelées *éléments* de la courbe résultante.

On voit donc que : *Toute ligne courbe n'est qu'une ligne brisée ayant une infinité de côtés, chacun infiniment petit et invisible aussi bien que chaque angle extérieur de courbure.*

On voit aussi que : *Toute figure plane curviligne fermée n'est en réalité qu'un polygone plan rectiligne d'une infinité de côtés infiniment petits.*

Remarque. — Ces corollaires sont rigoureusement déduits de la définition descriptive de la courbe ; l'auteur de cette définition emploie donc toujours, du moins implicitement, les grandeurs infinitésimales en Géométrie. Mais ses déductions seraient nécessairement plus claires et plus simples par l'emploi *explicite* de ces grandeurs, lequel emploi fait passer *immédiatement* du connu à l'inconnu.

D'ailleurs, comme on ne saurait réfuter les conséquences ci-dessus, on est bien forcé de reconnaître que les infinis et les infiniment petits, ayant une existence certaine, ne sont point des quantités chimériques, mais sont des réalités géométriques aussi bien que les quantités finies.

Enfin, ne pas mentionner les infiniment petits, éléments logiques indispensables dans les théories des courbes et des rapports, c'est compliquer et obscurcir volontairement les raisonnements, et c'est même souvent les rendre complètement erronés.

Théorème des variables. — *Si dans l'égalité exacte*

$$a + x = b + y, \quad \text{d'où} \quad a - b = y - x,$$

a et *b sont deux grandeurs constantes, tandis que x et y sont deux variables, pouvant diminuer ensemble indéfiniment sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister ; je dis que les deux constantes sont égales entre elles aussi bien que les deux variables.*

Soit d la différence constante des deux grandeurs a et b : on aura donc toujours $a - b = d$ et $d = y - x$. Or, si la différence constante d n'est pas nulle, l'égalité $d = y - x$ sera détruite quand on supposera moindre que d chacune des variables x et y ; ces deux variables ne pourront donc point diminuer ensemble indéfiniment, contrairement à l'hypothèse. Donc il faut que $d = 0$; d'où $a = b$ et $x = y$.

Si l'égalité proposée était $a - x = b - y$, on verrait de même que $a = b$ et $x = y$. Le théorème est donc ainsi démontré complètement.

Remarque. — *Si une grandeur varie seule dans une égalité, celle-ci restant néanmoins toujours exacte, c'est que cette égalité est absolument indépendante de la variable proposée.* Cette variable n'a donc pu y entrer que comme *auxiliaire*, devant par

suite disparaître du résultat final. C'est ce qui arrive dans le théorème de Lacroix, dont voici l'énoncé :

« Si deux grandeurs invariables A et B sont telles qu'on puisse prouver que leur différence X soit moindre qu'une troisième grandeur δ, quelque petite que puisse être cette dernière, ces deux grandeurs A et B sont égales entre elles. »

On a $A - B = X$ ou $A = B + X$. La différence X n'est pas supposée nulle, puisqu'on peut prouver qu'elle est moindre que la grandeur δ, si petite que soit cette dernière. On voit que X peut diminuer indéfiniment sans que l'égalité proposée $A = B + X$ soit détruite. Donc cette égalité est absolument indépendante de la variable X ; car autrement la grandeur constante A serait toujours égale à la grandeur variable $B + X$; chose absurde. On a donc rigoureusement $A = B$. Ce qu'il fallait démontrer.

Principe infinitésimal. — *Toute grandeur doit se négliger ou être regardée comme nulle à l'égard de celle qui la contient une infinité de fois et qu'elle doit augmenter ou diminuer :* c'est un *zéro relatif* à cette dernière.

1° D'après l'hypothèse de Lacroix, la différence X est *infiniment petite* dans l'égalité toujours exacte $A = B + X$; et l'on sait qu'on a rigoureusement $A = B$. La variable X infiniment petite est donc *nulle* à l'égard de la constante B *finie* qui la contient une infinité de fois. — D'ailleurs, puisqu'on cherche une grandeur finie A, le nombre infiniment petit X ne saurait en faire partie ; donc X doit disparaître de l'égalité $A = B + X$, absolument comme si cet infiniment petit était rigoureusement nul ; d'où encore $A = B$.

2° Puisque 4 est contenu une infinité de fois dans ∞, il s'en suit que $\infty - 4$ est la même chose que ∞. — Il est en effet évident qu'un nombre infiniment grand n'est ni plus ni moins infini lorsqu'on lui ajoute ou qu'on en retranche un nombre fini donné. D'ailleurs, $\infty - 4 = \infty \left(1 - \frac{4}{\infty}\right) = \infty$, d'après (1°).

Corollaire. — Soient Sn et Sn^2 les sommes des n premiers nombres entiers et de leurs carrés : on sait que

$$Sn = \frac{1}{2} n(n+1) \text{ et } Sn^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Si donc n est infini, 1 est nul à l'égard de n, et l'on a

$$Sn = \frac{1}{2} n^2 \text{ et } Sn^2 = \frac{1}{3} n^3. \text{ De même } Sn^3 = \frac{1}{4} n^4.$$

De l'emploi des Infinis.

Théorème. — Pour montrer combien l'emploi *explicite* des grandeurs infinitésimales simplifie les recherches géométriques, en faisant passer directement du connu à l'inconnu, proposons-nous de démontrer ce théorème : *La surface latérale de tout cylindre droit a pour mesure le produit des mesures de sa hauteur et du contour de sa base.*

Soit S la surface latérale du cylindre droit proposé, h sa hauteur et c la longueur de la courbe, convexe ou concave, qui termine sa base plane. On sait, par la définition descriptive, que la courbe c est composée d'une infinité d'éléments rectilignes infiniment petits et invisibles ; donc la surface latérale S est la somme du même nombre infini de rectangles plans infiniment étroits et invisibles eux-mêmes, ayant tous h pour hauteur et pour bases les éléments rectilignes de c. Or, les unités *linéaire* et *superficielle* étant toujours sous-entendues comme diviseurs ou conséquents des rapports numériques, ceux-ci appelés alors *mesures* des antécédents, chaque rectangle partiel a pour mesure sa base multipliée par sa hauteur ; donc la surface S a pour mesure la somme des bases ou la longueur c multipliée par la hauteur h commune ; c'est-à-dire qu'on aura toujours $S = hc$; ce qu'il fallait démontrer.

Méthode des variables. — Soit *inscrit* dans le cylindre droit proposé un *prisme droit* de même hauteur h et la base ayant un nombre quelconque n de côtés. Soit S' la surface latérale de ce prisme et c' le contour de sa base : d'après ce qu'on vient de voir, il est clair qu'on a $S' = hc'$.

Or, il est évident que $c > c'$ et que $S > S'$.

Posant donc $S' = S - x$ et $c' = c - y$, puis substituant dans l'égalité précédente, elle devient

$$S - x = h(c - y) \text{ ou } S - x = hc - hy.$$

Cette égalité est vraie quel que soit le nombre n de faces latérales du prisme inscrit. Si donc le nombre n devient de

deux en deux fois plus grand, la ligne c' a de deux en deux fois plus de points communs avec la courbe c ; donc c' approche de plus en plus de coïncider avec c, aussi bien que S' avec S ; les différences x et hy diminuent donc de plus en plus.

On voit que les grandeurs S et hc restent constantes pendant que les variables x et hy diminuent ensemble indéfiniment, sans que l'égalité proposée cesse d'exister. Donc en vertu du théorème des variables, on a comme plus haut $S=hc$, et en outre $x=hy$.

Méthode des limites. — Si pour n infini, les différences x et hy ne sont pas rigoureusement nulles, elles sont du moins infiniment petites, et les *variables* c' et S' ne coïncident pas avec leurs *limites* c et S. Donc, en supposant ces coïncidences parfaites, on commet deux erreurs infiniment petites. Mais *il n'y a aucune erreur finale ;* d'abord parce que toute grandeur infiniment petite est nulle à l'égard d'une grandeur finie, comme ne pouvant en faire partie ; et ensuite parce qu'ayant $x=hy$ ou $x-hy=0$, les deux erreurs se compensent ou se détruisent toujours. D'ailleurs, l'égalité $x-hy=0$ est vraie encore pour $x=0$ et $y=0$; ce qui fait coïncider S' et c' avec leurs *limites* S et c. *On peut donc toujours, sans qu'il en résulte aucune erreur finale, regarder les variables comme coïncidant à l'infini avec leurs limites.* C'est le théorème résultant des définitions descriptives.

Puisqu'il y a coïncidence à l'infini, on voit que : *La limite constante et la variable limitée jouissent des mêmes propriétés générales.* Et tel est le principe fondamental de la *méthode des limites* ; laquelle est identique, comme on voit, avec la méthode infinitésimale. Mais celle-ci est plus claire, plus simple que l'autre, comme étant plus explicite dans l'expression des faits à étudier.

Propositions fondamentales. — Maintenant, il est bien établi que pour les rapports et le mesurage, *on peut toujours, sans aucune erreur finale* : 1° Traiter toute figure plane curviligne fermée comme un polygone plan rectiligne d'une infinité de côtés infiniment petits et invisibles ; 2° Considérer le cercle comme un polygone régulier dont le rayon et l'apothème sont égaux entre eux ; 3° Enfin, traiter tout secteur circulaire comme

un secteur de polygone régulier composé d'une infinité de triangles isocèles égaux, le centre, les éléments rectilignes de l'arc et le rayon étant le sommet commun, les bases et la hauteur de chacun.

Ces trois propositions constituent la *méthode infinitésimale* en Géométrie pour passer directement du connu à l'inconnu : elles conduisent *immédiatement*, c'est-à-dire par la voie la plus simple et la plus claire, à tous les théorèmes relatifs aux *proportions* et au mesurage dans le cercle et les corps ronds; et cette voie est en même temps d'une exactitude parfaite. Aussi l'avons-nous suivie dans les différentes éditions du traité de Géométrie, où nous l'avons parfois remplacée par l'*axiôme de généralisation ;* lequel au fond n'en est qu'un corollaire où les grandeurs infinitésimales ne sont pas mentionnées.

Réflexions sur l'emploi des Infinis.

I. — Non-seulement les grandeurs infinitésimales ont une existence certaine, mais elles sont toujours employées en Géométrie, du moins implicitement, soit comme éléments *logiques* nécessaires aux démonstrations rigoureuses les plus simples des proportions, soit comme éléments *auxiliaires* indispensables pour passer directement du connu à l'inconnu, par la voie la plus sûre et la plus simple lorsque ces éléments auxiliaires sont employés explicitement. Donc l'analyse infinitésimale n'est pas *une doctrine fausse qu'il faille renverser.* Dans tous les cas, pour cet effet, il faut autre chose que des nonsens, des pétitions de principe et des raisonnements erronés.

Avant donc de condamner l'emploi explicite des grandeurs infinitésimales en Géométrie, il est d'abord nécessaire de citer au moins un exemple où cet emploi, à l'aide de déductions logiques rigoureuses, fondées sur des notions exactes et bien établies, induirait en erreur et ferait prendre le faux pour le vrai.

Comme je n'ai pas encore rencontré de tels exemples, j'ai demandé quels sont *les abus et les inconvénients reconnus* qui feraient proscrire, s'il était possible, la méthode infinitésimale de l'enseignement .... *Elle reçoit*, a-t-on dit, *des résultats positifs de la science une confiance dont elle n'est pas digne :* quels sont donc ces résultats positifs ? Ne sont-ils pas fondés

sur l'emploi implicite des infiniment petits? Et si cela est en effet, a-t-on le droit alors de dire qu'on ne fait aucun usage des infinis ?

En attendant les réponses à ces questions, je dis qu'il ne suffit pas, pour renverser une doctrine établie, de déclarer qu'elle est fausse, mais qu'il faut nécessairement le prouver. Or, cette preuve n'a pas encore été donnée, que je sache, pour la théorie infinitésimale.

II. — D'Alembert regardait comme un préjugé nuisible le non-emploi des infiniment petits, dans l'étude des sections coniques. — Laplace (séances de l'école normale) dit : « La méthode des limites sert de base au calcul infinitésimal. Pour faciliter l'intelligence de ce calcul, il est utile d'en faire remarquer les premiers germes dans les vérités élémentaires, qu'il convient toujours de démontrer suivant des méthodes générales... » — Enfin, le programme d'études dans les Lycées de France, en 1852, et l'instruction ministérielle relative à ce programme, en 1854, prescrivent l'emploi de la méthode infinitésimale ou des limites dans la Géométrie élémentaire.

Dans l'instruction ci-dessus on lit : « On devra laisser de côté, d'une manière absolue, toute démonstration fondée sur ce qu'on appelle la *réduction à l'absurde.* »

Par cette forme de raisonnement, en effet, on commet un non-sens ou une pétition de principe pour éviter l'emploi des grandeurs infinitésimales, sans qu'on puisse néanmoins y parvenir ; comme dans les théorèmes relatifs aux rapports et au mesurage du cercle et des corps ronds. Dans ces théorèmes la réduction à l'absurde est effectivement « *une méthode vicieuse.* » Mais elle est exacte, parfois nécessaire et souvent utile pour faciliter les démonstrations lorsque chaque proposition à établir a déjà une certaine évidence, comme beaucoup de propositions réciproques.

La même instruction dit encore : « A l'occasion de la mesure des angles au moyen des arcs, le programme recommande expressément que la proposition étant démontrée pour le cas où il y a une commune mesure entre les arcs et les angles, quelque petite qu'elle soit, cette proposition soit par cela considérée comme générale. Lorsqu'on réfléchit en effet attentivement aux démonstrations relatives aux quantités incommensurables, on comprend bientôt qu'on ne se fait une idée d'un

rapport incommensurable qu'en le considérant comme la limite du rapport de deux quantités commensurables et dont la commune mesure est aussi petite qu'on le veut. »

Donc il est ainsi admis que *les deux arcs incommensurables proposés ont toujours une commune mesure infiniment petite ;* ce qu'on a démontré précédemment. Et comme la notion des infiniment petits est clairement établie, je pense que pour plus de précision dans l'instruction ci-dessus, il aurait fallu dire : commune mesure *infiniment petite* au lieu de commune mesure *aussi petite qu'on le veut.*

III. — On prouve que le cercle est la *limite* des polygones réguliers, soit *inscrits*, soit *circonscrits*, en disant : Le nombre de côtés devenant de deux en deux fois plus grand, il est évident que le polygone approche de plus en plus de coïncider avec le cercle, sans jamais y parvenir, *si ce n'est à l'infini* en vertu de la définition descriptive de la courbe. Car à l'infini la différence, si elle existe, étant infiniment petite, on ne saurait en tenir compte et elle n'a pas plus d'influence sur la grandeur finie cherchée que si elle était rigoureusement nulle. C'est d'ailleurs ce qu'on a établi plus haut.

La coïncidence à l'infini du cercle et du polygone régulier est admise dans le programme cité ; car on y trouve la prescription suivante : « *Mesure de l'aire du cercle, envisagé comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.* »

Ce programme admet donc, comme proposition évidente, que : *Le cercle et les polygones réguliers dont il est la limite jouissent des mêmes propriétés générales, c'est-à-dire indépendantes du nombre de côtés.* Ce qui le prouve d'ailleurs, c'est que d'après l'instruction ministérielle, la proportion entre deux circonférences et leurs rayons doit se déduire *immédiatement* de la proportion entre les périmètres et les rayons de deux polygones réguliers semblables.

J'ai fait voir le premier en Géométrie que : *Le rapport approché d'une circonférence à son diamètre est le même pour deux circonférences quelconques.*

Pareillement, dans l'instruction ci-dessus, il est prescrit de passer immédiatement de l'expression de l'aire d'un polygone régulier à l'expression de l'aire du cercle, et de même pour les théorèmes relatifs au mesurage dans les corps ronds.

IV. — On traite le cercle comme un polygone régulier d'un

nombre infiniment grand de côtés infiniment petits, dans le Cours de Géométrie de M. Bobillier, cité plus haut. Mais on démontre d'abord que la circonférence ne surpasse le périmètre du polygone régulier inscrit d'une infinité de côtés que d'un infiniment petit du *second ordre*, nul à l'égard de toute longueur finie.

V. — Dans la troisième édition de son Traité de Géométrie, simplifiant beaucoup celui de Legendre, Paris 1854, M. Blanchet a cherché à mettre autant que possible les théories en harmonie avec les programmes de l'enseignement universitaire et des écoles du Gouvernement en France. Cependant, pour démontrer que : *Dans deux cercles égaux le rapport de deux angles aux centres est le même que celui des arcs interceptés par leurs côtés*, M. Blanchet, page 42, considère encore le cas où les deux arcs sont *incommensurables*, et commet ainsi une *pétition de principe* ou un *non-sens*. Il fait voir ensuite que les deux rapports proposés sont compris entre deux nombres dont la différence est aussi petite qu'on voudra, et il en conclut que ces deux rapports sont égaux.

Mais cette conclusion est trop précipitée ; car la différence ci-dessus n'étant jamais nulle, il y a une infinité de rapports inégaux compris entre les deux nombres proposés. Il ne s'ensuit donc pas nécessairement que les deux rapports cherchés soient égaux entre eux : c'est ce qui reste toujours à démontrer. Seulement il en résulte que ces deux rapports sont égaux *par approximation*. Mais leur égalité est *absolue*, ainsi qu'on le démontre très-simplement par la méthode des parties égales.

M. Blanchet n'employant pas explicitement les grandeurs infinitésimales, ne saurait justifier la proposition plus haut, savoir : *Le cercle jouit des mêmes propriétés générales que les polygones réguliers dont il est la limite ;* il ne démontre donc pas la proportion entre les circonférences et leurs rayons, page 114 de sa Géométrie.

Dans la détermination de l'aire du cercle, page 117, il suppose que : *Si deux variables sont constamment égales entre elles, il en est de même de leurs limites.* Or, c'est ce qu'il doit encore démontrer ; vu que ne voulant faire aucun usage des grandeurs infinitésimales, il ne saurait admettre que : *la variable et sa limite coïncident à l'infini.*

Les simplifications introduites par M. Blanchet seraient plus

grandes, s'il avait donné plusieurs démonstrations nécessaires à la clarté et à une certitude complète. Or, ces démonstrations rigoureuses sont fondées sur le théorème des variables auxiliaires quand on ne veut faire aucune mention des infinis, alors employés implicitement.

VI. — Non-seulement l'emploi explicite des grandeurs infinitésimales est inévitable en Géométrie, pour simplifier le plus possible cette science importante; mais cet emploi est la base de la *Mécanique rationnelle*. C'est ce que nous avons prouvé complètement dans la recherche des lois de tout mouvement *uniformément accéléré*.

Ici le temps infiniment petit x qu'il faut évidemment pour que le point matériel libre reçoive complètement, par son inertie, chacune des impulsions égales et infiniment petites de la force accélératrice constante, exige que le temps T soit divisé en un nombre infini n de parties égales à x. De sorte que n et x sont constants, aussi bien que le temps T, la force accélératrice et le point matériel. Le mouvement uniformément accéléré n'admet donc aucun élément variable, pas même les éléments auxiliaires n et x. Par conséquent la méthode des variables auxiliaires ne peut servir aucunement à la détermination des lois de ce mouvement, quand même cette méthode serait abrégée par le calcul différentiel, lequel n'est ici que le calcul infinitésimal où dE et dT sont infiniment petits et constants.

Nous avons fait voir ailleurs que si, partant d'une hypothèse contraire à la vérité, les nombres variables n et x sont *finis*, on est conduit à une équation finale renfermant trois termes variables et un seul terme constant; d'où l'on ne peut rien conclure relativement à la loi cherchée. Il faut donc le calcul infinitésimal pour démontrer cette loi.

Maintenant, que le terme infiniment petit soit constant ou variable, il doit nécessairement disparaître du résultat final, d'abord comme *auxiliaire* et ensuite comme ne pouvant faire partie de la grandeur *finie* cherchée. La méthode infinitésimale est donc plus générale que la méthode des variables : elle est plus simple que celle-ci et tout aussi rigoureusement exacte; vu qu'en supprimant d'abord les termes devenant infiniment petits dans le résultat final, on ne commet aucune erreur sur la grandeur finie.

Mais la méthode des variables auxiliaires, quand elle est applicable, fait voir que les erreurs *relatives* se compensent et se détruisent toujours dans le résultat final, lequel par suite est rigoureusement exact et le même que celui obtenu par la suppression immédiate des termes devenant infiniment petits à la fin du calcul.

C'est ainsi que le théorème des variables démontrerait la méthode infinitésimale, si elle n'était démontrée plus généralement par le seul fait qu'un nombre infiniment petit ne peut faire partie du nombre fini cherché; c'est-à-dire ne peut l'augmenter ni le diminuer, absolument comme s'il était rigoureusement nul à l'égard de ce nombre fini.

VII. — « On ne saurait assimiler le mouvement varié au mouvement uniforme en imaginant des intervalles de temps infiniment petits qui se succèdent de manière à reproduire la durée totale, et pendant chacun desquels il y a par hypothèse uniformité. »

Voici comment cette proposition au moins singulière est prouvée, page 250 des *Annales de l'enseignement public*, 1857.

« 1°. Si ces quantités infiniment petites sont des quantités très-petites, il est absolument faux qu'un mouvement varié puisse se composer d'une suite de petits mouvements uniformes, se succédant sans intervalles et de vitesses différentes, puisqu'il faudrait que la vitesse changeât brusquement partout où l'un des petits mouvements succéderait à un autre. »

« 2°. Si ces quantités infiniment petites ne sont pas telles (très-petites), alors ce sont des quantités *reconnues aujourd'hui chimériques*, et qui dépourvues de sens, ne peuvent faire partie d'un enseignement quelque peu régulier. »

Il faudrait donc conclure de ces raisonnements, s'ils étaient exacts, que les intervalles ci-dessus ne peuvent être ni très-petits ni infiniment petits.

Cependant, « si la vitesse est la limite vers laquelle converge le rapport de l'espace décrit au temps employé à le décrire, lorsqu'on fait décroître ce temps indéfiniment, » il est clair que cette quantité *décroissante indéfiniment*, ne pouvant jamais devenir nulle, finit par être moindre que toute quantité assignée, si petite qu'elle soit, aussi bien que l'espace décrit; celui-ci et le temps employé à le décrire sont donc *infiniment*

petits à la limite et ne sont point alors des *quantités chimériques, dépourvues de sens.*

On voit que les infiniment petits se trouvent implicitement dans la définition précédente, et que cette définition est moins claire, moins précise que celle-ci, dont il faut nécessairement faire usage pour rester dans le vrai et le simple : *La vitesse est le rapport de deux nombres infiniment petits, exprimant l'espace décrit et le temps employé à le décrire.*

Ainsi en Mécanique comme en Géométrie, les grandeurs infinitésimales se présentent inévitablement pour faciliter et simplifier les déductions logiques du calcul.

Dans l'avertissement mis en tête d'une nouvelle édition de sa Mécanique analytique, Lagrange lui-même dit : « On a conservé la notation ordinaire du Calcul différentiel, parce qu'elle répond au système des infiniment petits adopté dans ce Traité. Lorsqu'on a bien conçu l'esprit de ce système, et qu'on s'est convaincu de l'exactitude de ses résultats,.... on peut employer les infiniment petits comme un instrument sûr et commode pour abréger et simplifier les démonstrations. » (Carnot, Réflexions sur la Métaphysique, etc.)

Lagrange reconnaît ainsi que l'analyse infinitésimale l'emporte en simplicité (et je dirai même en exactitude rigoureuse) sur la *Théorie des fonctions analytiques*, qu'il a voulu rendre indépendante des nombres infinis et infiniment petits, et où cependant ces nombres sont employés implicitement ; car ils se trouvent dans les rapports inexprimables en chiffres, faisant nécessairement partie des nombres variables soumis au calcul et ces derniers nombres devant passer chacun par tous les états de grandeur, pour la généralité complète de la théorie ci-dessus.

VIII. — La méthode infinitésimale est en usage depuis près d'un siècle pour simplifier certaines propositions de mesurage dans les éléments de Géométrie. Mais les notions des infinis et des infiniment petits n'étaient pas d'abord développées suffisamment ni assez approfondies pour en déduire le *principe infinitésimal*, employé alors implicitement. Et de là vient le manque de rigueur reproché aux démonstrations des propositions ci-dessus.

Dans les éléments de Géométrie de Lacroix et de Francœur, le principe infinitésimal n'est pas évité ; il est déguisé et rem-

placé par des théorèmes sur les *variables auxiliaires;* tandis que dans ceux de Legendre, de longues et obscures réductions à l'absurde ne parviennent même pas à cacher entièrement les infinis qu'on a voulu éviter, lesquels se trouvent au fond des raisonnements comme éléments logiques auxiliaires et qui sont indispensables pour rendre ces raisonnements intelligibles.

IX. — L'existence des nombres infinis et infiniment petits est bien établie; les définitions de ces deux genres de nombre, toujours inconnus, sont claires, précises et n'ont rien de plus abstrait, de plus difficile à concevoir, que les notions des lignes et des surfaces. La méthode infinitésimale est donc complètement élémentaire; et aucune autre méthode ne peut comme elle rendre clair, simple et rigoureusement exact l'enseignement des Éléments de Géométrie, ainsi qu'il est prouvé dans ce qui précède.

On voit que l'emploi explicite des infinis dans les Mathématiques élémentaires est loin d'être « *un grave et dangereux abus* » et d'avoir fait déjà beaucoup de mal à l'enseignement; on l'a dit. C'est en effet le contraire qui est vrai; cet enseignement n'étant simple, clair et rigoureux que par les infinis, employés explicitement pour passer de l'étude des figures rectilignes et des polyèdres à l'étude des figures curvilignes et des corps ronds.

Il n'est donc pas seulement très-utile, mais il est absolument nécessaire d'employer franchement et exclusivement la méthode infinitésimale dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire, pour passer *immédiatement* du connu à l'inconnu et donner en même temps aux déductions toute la clarté, la simplicité et la complète exactitude dont elles sont susceptibles. Car la rigueur logique n'est certainement pas dans les non-sens, les pétitions de principe, les longs et obscurs détours employés pour déguiser les infinis.

Enfin, l'analyse infinitésimale se présente inévitablement pour simplifier et rendre possible l'étude logique complète des Mathématiques pures et appliquées. Son emploi, dans l'enseignement élémentaire, « donne à la fois aux élèves des connaissances et la méthode pour en acquérir de nouvelles. En continuant de s'instruire, ils ne font que suivre la route qui leur a été tracée et dans laquelle ils ont contracté l'habitude de marcher; de sorte que la carrière des sciences leur devient beaucoup moins

pénible. D'ailleurs le système de connaissances, liées entre elles par une méthode uniforme, peut mieux se conserver et s'étendre. » — Telles sont les considérations par lesquelles Laplace recommande l'emploi, nécessaire d'ailleurs, de la méthode infinitésimale dans l'enseignement élémentaire. Aussi désirait-il le perfectionnement de cette méthode, qu'il regardait comme un puissant instrument de l'esprit humain.

Des symboles numériques.

La *discussion* complète des problèmes généraux d'algèbre et de géométrie numérique exige le calcul des différents *symboles* de nombres que nous allons considérer :

I. — *Lorsque la racine* r *ième d'un nombre entier* N *n'est pas elle-même un nombre entier, c'est toujours une fraction irréductible finie dont les termes sont infinis.*

D'abord la racine r ième de N est un nombre *fini*, car elle est comprise entre deux nombres entiers immédiatement consécutifs et ce n'est pas un nombre entier. Si donc cette racine r ième de N peut s'exprimer exactement par la fraction dont les termes a et c soient deux nombres entiers finis, *premiers entre eux*, il faudra que la puissance r ième de cette fraction a sur c, savoir a^r sur c^r, se réduise au nombre entier N. Or, cela est absolument impossible ; car c étant premier avec a et par suite avec a^r, il en résulte que c^r est aussi premier avec a^r. Le quotient de a^r par c^r ne peut donc se réduire au nombre entier N. Ainsi les deux termes de la racine r ième de N ne peuvent être des nombres entiers *finis ;* donc ils sont nécessairement *infinis* et n'ont point de diviseur infini commun.

La racine r ième de N étant donc une fraction irréductible finie, mais à termes infinis, on voit que cette fraction sera toujours *inexprimable* en chiffres et par suite *inconnue.* Mais on sait la calculer aussi approchée qu'on la veut ; et cela suffit dans tous les cas.

On indique la racine r ième de N en écrivant $\sqrt[r]{\text{N}}$ et en énonçant *racine* r *ième de* N. Cette indication est un *radical du* r *ième degré* dont r est l'*indice ;* et c'est aussi le *symbole* d'un nombre inexprimable, appelé nombre *irrationnel* ou nombre *incommensurable,* — De même, ∞ et 1 sur ∞ sont les *symboles*

de deux nombres inexprimables et toujours inconnus, l'un infiniment grand et l'autre infiniment petit.

II. — On sait que si la longueur finie a est supposée divisée en un nombre *infini* n de parties égales, chaque partie p est *infiniment petite* et jamais nulle. De sorte qu'on a

$$\frac{a}{n} = p\,;\ \text{d'où}\ \ p \times n = a\ \ \text{et}\ \ \frac{a}{p} = n.$$

Dans ces égalités, n et p sont infini et infiniment petit *du premier ordre*.

Pareillement, si l'on suppose la longueur infiniment petite p divisée en un nombre infini n de parties égales, chaque partie p' est une longueur infiniment petite du *second ordre*, laquelle n'est jamais nulle. Et comme alors on a

$$p' = \frac{p}{n} = \frac{a}{n^2},\ \ \text{d'où}\ \ p' \times n^2 = a\ \ \text{et}\ \ \frac{a}{p'} = n^2\,;$$

le nombre n^2 est un infini *du second ordre*.

En général, le produit de 2, 3, 4,... facteurs infinis ou infiniment petits est un infini ou un infiniment petit du *second ordre*, du *troisième*, du *quatrième*, etc.

Puisque n désigne le nombre infini de toutes les fractions possibles, plus grandes que l'unité et à termes infinis, depuis 1 exclu jusqu'à 2 inclus, il en résulte que n^2 est le nombre infini de fractions possibles, à termes infinis du second ordre. Donc les nombres infinis du second ordre de toutes les fractions possibles, à termes infinis de cet ordre et chacune plus grande que l'unité, depuis 1 exclu jusqu'à 2, 3, 4, 5, 6...., m inclus, sont :

$$n^2,\ 2n^2,\ 3n^2,\ 4n^2,\ 5n^2\ldots.,\ (m-1)\,n^2.$$

On a des suites semblables de nombres infinis du troisième ordre, du 4^{me}, etc.

III. — Dans presque tous les Traités d'Algèbre, on ne fait aucune mention des nombres infiniment petits, et l'on regarde même comme exactes les égalités :

$$\frac{6}{\infty} = 0\ \ \text{et}\ \ \frac{6}{0} = \infty\ \ldots\ (1)$$

Cependant, pour la clarté et la précision du langage, il est

nécessaire d'avertir qu'ici le *zéro* est *relatif* et désigne un nombre *infiniment petit*. Sans cette précaution, le zéro sera naturellement regardé comme le *rien*, le *néant* et l'*absence* de toute grandeur. D'où l'on concluera alors forcément que les deux égalités précédentes sont absurdes.

Ces deux égalités, en effet, supposent celle-ci : $0 \times \infty = 6$. Or, cette dernière égalité est absolument impossible; car le zéro absolu répété, même une infinité de fois, ne peut produire que zéro et jamais 6. Donc aussi chacune des égalités (1) est impossible.

On voit que le quotient de 6 par le zéro absolu n'existe pas; c'est-à-dire que $\frac{6}{0}$ est le *symbole* de la *non-existence* du nombre de fois que 6 contient *rien*. D'ailleurs, la grandeur 6 et le *néant* sont deux choses de natures différentes; la première ne saurait donc contenir la seconde.

Puisque $\frac{6}{0}$ est un symbole de non-existence, tandis que ∞ est le symbole d'un nombre infini, dont l'existence est certaine, on voit que ces deux symboles ne sont pas identiques et qu'il est absurde de prendre l'un pour l'autre.

IV. — Un *terme soustractif* isolé tel que -7, par exemple, indique une soustraction actuellement impossible, parce que le plus grand nombre de cette soustraction n'existe pas ou bien est *sous-entendu* comme n'étant pas l'objet du calcul actuel. Donc -7 n'est pas un nombre : c'est un *symbole* de nombre appelé *quantité négative;* c'est le *reste algébrique* de la soustraction impossible de 11 hors de 4, par exemple. On a, en effet, $4 - 11 = 4 - 4 - 7 = 0 - 7 = -7$. — Cette réduction de plusieurs termes en un seul se présente d'abord en algèbre, pour simplifier les expressions numériques.

Soustrayant 8 de chacun des membres des deux inégalités de même sens $5 < 8$ et $2 < 4$, les deux nouvelles inégalités subsistent évidemment dans le sens des deux proposées. De sorte qu'en réduisant, on aura $-3 < 0$ et $-6 < -4$. Ainsi, *toute quantité négative est plus petite que zéro; et plus une quantité négative a d'unités, plus elle est petite.*

Par cette extension d'idées importante, les termes vont en diminuant dans la progression par différence, où -1 est la raison :

$$4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, - \text{ etc.}$$

Dans le *sens relatif* de deux soustractions hors d'un même nombre sous-entendu, le reste -2 est plus grand que le reste -6 ; vu que *moins on retranche plus il reste, et réciproquement.* Mais la comparaison des deux symboles de même nature -2 et -6, considérés en eux-mêmes, fait voir au contraire que le second -6 est trois fois plus grand que le premier -2 ; car $-6 = -2 \times 3$.

V. — Puisque le *rapport* est le nombre abstrait, exprimable ou non, par lequel il faut multiplier le conséquent pour avoir l'antécédent, il s'ensuit nécessairement que *les deux termes du rapport sont toujours deux grandeurs ou deux symboles de grandeurs absolument de même nature.* Ainsi 3 est le rapport de -6 à -2.

De même, le rapport des deux *symboles imaginaires* $\sqrt{-9}$ et $\sqrt{-3}$ est $\sqrt{3}$; car $\sqrt{-9} = \sqrt{-3} \times \sqrt{3}$

Si les deux nombres 9 et 4 sont divisés en un même nombre infini n de parties égales infiniment petites x et y, d'où $nx = 9$ et $ny = 4$, on aura $x : y = 9 : 4$. Le rapport des deux infiniment petits x et y est donc ici le nombre fini et déterminé $\frac{9}{4}$.

En général, le rapport de deux nombres infinis ou infiniment petits du même ordre est toujours un nombre fini, mais inconnu ou indéterminé comme ses deux termes. Toutefois le rapport de $6\infty^2$ à $3\infty^2$ se réduit au nombre 2. Mais cela vient de ce que les deux termes sont les multiples donnés 6 et 3 du même nombre infini ∞^2.

Le quotient de -6 par $+3$ est -2. Mais comme -2 n'est pas un nombre abstrait, le rapport de -6 à $+3$ n'existe pas. Ces deux symboles, en effet, ne sont pas de même nature, et il n'existe aucun nombre abstrait par lequel multipliant $+3$ le produit soit -6.

Dans la proportion exacte $+12 : +4 = -6 : -2$, le rapport commun est 3. Mais *on ne saurait y mettre les moyens l'un à la place de l'autre, sans la détruire ;* car ayant alors $+12 : -6 = +4 : -2$, on exprime l'égalité des deux quotients -2, et non l'égalité de deux rapports, puisque -2 n'est pas un nombre abstrait. L'égalité ci-dessus n'est donc pas une proportion.

De même, $12 : -6 = -4 : 2$ n'est pas une proportion ;

et l'on ne saurait en conclure qu'*il est faux que* -4 *soit plus petit que* 2.

Enfin, si dans la proportion $A : B = C : D$, A et B sont deux *surfaces* planes limitées en tous sens, tandis que C et D sont deux *lignes droites* tracées, on ne saurait, sans absurdités, mettre les moyens ou les extrêmes l'un à la place de l'autre, ni égaler les produits des extrêmes et des moyens. Voilà pourquoi il faut toujours rendre *numérique* la proportion entre quantités continues, *en divisant les deux termes de chaque rapport par l'unité de même nature;* ce qui ne change pas la valeur du rapport et ne détruit point la proportion. — Pour les démonstrations, il suffit de supposer les divisions faites, les diviseurs étant alors *sous-entendus* et censés écrits sous les termes qu'ils doivent diviser.

VI. — Maintenant, la *discussion complète* d'une formule générale exige que dans la différence positive $8 - x$, par exemple, la variable x croisse *continuement* ou par *degrés insensibles*, c'est-à-dire croisse par nombres *infiniment petits*. Alors cette différence *diminue* de plus en plus et passe successivement par l'*infiniment petit positif*, *le zéro absolu et l'infiniment petit négatif*, *avant de recevoir une valeur soustractive finie.*

Donc au contraire, le quotient de 6 par $8 - x$ passe successivement par l'*infini positif*, *la non-existence et l'infini négatif*, *avant de recevoir une valeur finie soustractive.*

Les auteurs d'Algèbre, pour la plupart, dans la seconde solution du *problème des Lumières*, confondent les trois symboles $+\infty$, $\frac{1}{0}$ et $-\infty$ en un seul *impossible*. Le second indique une impossibilité *absolue*, tandis que les deux autres désignent deux impossibilités *relatives* à nos moyens d'appréciation. Ici, $+\infty$ et $-\infty$ sont deux distances infinies, *dirigées l'une en sens directement contraire à celui de l'autre.* Ces deux distances existent; mais nous ne pourrons jamais les tracer ni les mesurer, et elles nous seront toujours inconnues.

On sait que la *discussion* d'un problème général d'Algèbre ou de Géométrie numérique a pour but de savoir dans quels cas ce problème est *possible*, *indéterminé* ou *absurde*. Si la discussion fournit l'un des symboles : $-a$, $\frac{a}{0}$ et $\sqrt{-a}$, le problème est absolument impossible, ou du moins l'hypothèse qui a servi à le mettre en équation.

Dans chacun de ces cas, pour utiliser les raisonnements et les calculs effectués, il faut *interpréter* le symbole, c'est-à-dire trouver les modifications que l'énoncé doit subir pour que le problème devienne possible avec les mêmes nombres donnés. Or cela revient, pour chacun des trois symboles précédents, à changer la soustraction qui le produit en une addition ; etc.

VII. — Lorsque dans le même plan les deux droites AB et CD rencontrent, en G et H, la même troisième EF et font avec celle-ci l'angle externe EGB plus grand que l'angle interne correspondant EHD, on sait que ces deux droites se rencontrent nécessairement en un point X. Or, *il s'agit de calculer la distance* GX *du point* X *au point* G. (figure à tracer).

Pour cet effet, on prend sur GB la longueur GI égale à l'unité linéaire u ; on mène ensuite, par le point I, la parallèle à DH rencontrant GH au point N : il en résulte l'angle GNI = GHX, et par suite les deux triangles GHX, GNI sont équiangles. Comparant donc leurs côtés homologues, on aura

$$GX : u = GH : GN.$$

Posant $GX = x$, $GH = a$ et $GN = v$, il vient

$$x : u = a : v.$$

Cette proportion n'est pas détruite lorsque, pour avoir des nombres abstraits, on divise les quatre termes par l'unité linéaire u. Si donc on suppose ce diviseur écrit sous les termes x, a et v, on aura

$$x : 1 = a : v ; \text{ d'où } vx = a \text{ et } x = \frac{a}{v}.$$

De sorte que pour calculer la valeur numérique de x ou GX, il suffit de mesurer les droites a et v avec l'unité linéaire u et de diviser le premier nombre résultant par le second.

Maintenant, pour discuter la formule ci-dessus, on observe que la longueur a reste constante pendant que l'angle EGB diminue ; mais qu'en même temps v diminue aussi et x augmente de plus en plus. Si l'angle EGB surpasse *infiniment peu* l'angle EHD, la longueur v est *infiniment petite* et la longueur x *infiniment grande*. De sorte qu'alors les deux droites AB et CD se rencontrent en un point X, *situé à l'infini*.

Si l'angle EGB devient égal à l'angle EHD, le point N tombe en G ; vu qu'alors IN et GB sont parallèles à CD. La

longueur v est donc rigoureusement nulle, et la distance x ou a sur 0 cesse d'exister, aussi bien que le point X de rencontre ; comme cela doit être, puisque AB et CD sont alors parallèles.

L'angle EGB continuant à diminuer, il en est de même de la longueur v, laquelle par suite *devient négative*. Pour le démontrer, d'ailleurs, on observe que dans ce cas l'angle EGB étant plus petit que l'angle EHD, le point N tombe sur EG et non sur son prolongement GH ; la droite v ou GN est donc mesurée en sens *directement opposé* et diminue la longueur EG qu'elle augmentait d'abord pour avoir EN : donc enfin v devient $-v$ dans la formule proposée.

Il est donc ainsi clairement démontré que : *Toute distance mesurée en sens directement opposé doit recevoir partout le signe—, et devenir négative dans les équations employées.* Et l'on voit que ce théorème n'est par une *simple convention*, ainsi que plusieurs Géomètres le supposent.

Changeant donc v en $-v$ dans la formule proposée, elle devient $x = -\frac{a}{v}$. La longueur x devient donc aussi négative et diminue la longueur AG qu'elle augmentait d'abord pour avoir AX : la longueur négative est donc alors mesurée en sens *directement opposé* sur la droite AB, celle-ci ayant tourné autour du point fixe G.

Il est donc aussi démontré que : *Toute distance négative doit se mesurer en sens directement contraire, ou plutôt sa valeur numérique.* De sorte que ce théorème ne résulte pas d'une *simple convention.*

Portant donc la valeur numérique actuelle de GX *en sens directement opposé* et à partir du même point G, sur la droite indéfinie BGA dans sa nouvelle position autour du point fixe G, on aura le point X où les deux droites GA et HC prolongées vont nécessairement se couper ; car ici l'angle externe CHF est plus grand que l'angle interne correspondant AGF.

VIII. — Observons maintenant que dans les problèmes de Géométrie numérique, les formules ne contiennent que les nombres abstraits, *rapports* de droites limitées à la même unité linéaire, toujours sous-entendue comme conséquent de chaque rapport. D'après cela, les deux précédents théorèmes fournissent, pour l'usage des symboles négatifs dans la Géométrie numérique, les deux propositions que voici :

1°. Pour passer de la formule où une longueur a est mesurée sur une droite indéfinie et à partir de l'un de ses points fixes, à la formule où cette longueur a serait mesurée en sens contraire, à partir du même point et la droite étant mobile ou non autour de ce point fixe, *il suffit de changer simplement* a *en* — a *dans la première formule.*

Par la substitution de $-a$ à a, on est dispensé, pour avoir la seconde formule, de recommencer les constructions, les raisonnements et les calculs qui ont fourni la première. Or, cela simplifie beaucoup et généralise certaines recherches de Géométrie numérique.

2°. Réciproquement, lorsque la formule donne une valeur négative à la longueur inconnue x, *il suffit, pour avoir le problème résolu avec les mêmes données, de mesurer cette valeur, où l'on a supprimé le signe* —, *dans le sens directement opposé, sur la même droite et à partir du même point fixe, même quand la droite tournerait autour de ce point pour la nouvelle formule.* Cela revient à changer simplement x en $-x$ dans la formule et les équations proposées et à *interpréter* les nouvelles équations.

On sait que l'interprétation des symboles négatifs conduit à interpréter plusieurs autres symboles, et notamment les symboles imaginaires. Mais je n'ai pas ici à insister sur ce sujet : il me suffit de rappeler combien les deux propositions précédentes sont utiles pour simplifier le plus possible la *Trigonométrie;* et, en général, l'*application de l'Algèbre à la Géométrie.*

Remarque. — *Il ne faut pas croire*, a-t-on dit, *que l'on puisse soumettre l'infini au calcul.* Cependant, puisque les infinis et les infiniment petits sont des nombres inconnus, il est clair qu'ils peuvent être soumis à toutes les opérations du calcul, et que même leur emploi *explicite*, comme nombres *auxiliaires*, simplifie toujours certaines recherches numériques, telles que les propositions de mesurage dans les cercles et les corps ronds.

On sait, en effet, que le principe essentiel du *Calcul infinitésimal* fait trouver, le plus clairement et le plus simplement possible, des grandeurs *finies* à l'aide de nombres auxiliaires infinis et infiniment petits. Il est donc à regretter que la très-simple *Théorie infinitésimale* précédente, ne figure pas dans les Traités élémentaires d'Algèbre où elle peut recevoir d'utiles ap-

plications, aussi bien qu'en Géométrie où elle est indispensable. Dailleurs cette théorie est fort élémentaire elle-même : aussi plusieurs Géomètres, à commencer par Bernoulli, n'ont-ils rien trouvé de plus simple ni de plus clair pour calculer le nombre e, base du système des logarithmes Népériens, que le développement de la puissance n ième du binôme $1+\frac{1}{n}$, n désignant un nombre entier infini et où le principe infinitésimal est employé, du moins implicitement. (Voyez entre autres la Géométrie analytique par Lefébure).

C'est en effet, par l'emploi *explicite* de nombres infinis et infiniment petits que la formule du binôme, démontrée seulement pour l'exposant entier positif, conduit directement et avec facilité, aux séries exponentielles et logarithmiques, lesquelles sont nécessaires à la construction la plus simple des Tables de logarithmes et à l'appréciation des erreurs dues à la proportion tabulaire.

Enfin, c'est en généralisant les définitions des opérations que l'on démontre clairement et complètement le calcul des symboles négatifs et imaginaires. C'est aussi par un choix de bonnes définitions que l'on simplifie l'étude de la Géométrie élémentaire, ainsi qu'on l'a déjà vu pour la Géométrie plane.

Comparaison des Angles trièdres.

Remarques sur les définitions. — J'observerai d'abord que Legendre, dans ses Notes, propose d'appeler *angle coin* ce que Lacroix nomme *angle dièdre :* c'est l'espace indéfini dont deux plans, issus d'une droite commune, sont *écartés* l'un de l'autre, quant à leur *position* dans l'espace. La droite commune est l'*arête* de l'angle et les deux plans en sont les *faces;* d'où résulte la dénomination d'*angle dièdre.*

Si l'on convenait de sous-entendre le mot *angle*, l'espace indéfini ci-dessus se désignerait plus simplement en le nommant *dièdre* ou *coin.* Ici le mot *coin* n'a pas la même acception qu'en Mécanique, où le *tranchant* du coin est un angle coin, un angle dièdre. De même, le mot *angle* étant sous-entendu, au lieu d'*angle trièdre*, on dit simplement *trièdre.*

Des deux locutions : *les dièdres d'un trièdre* et *les coins d'un trièdre*, nous avons préféré la seconde. Mais la dénomination

de *dièdre* est généralement admise et le mot *coin* ne se trouve dans aucun auteur moderne de Géométrie.

Je pense qu'on peut employer les dénominations d'*angle solide* et d'*angle polyèdre* pour désigner le même espace indéfini compris sous plus de trois *faces* ou *angles plans*, et qu'au lieu de : *les angles polyèdres d'un polyèdre*, il est préférable de dire : *les angles solides d'un polyèdre*. — On sait d'ailleurs qu'au lieu d'*angle trièdre*, *angle tétraèdre*,... Legendre propose de dire *angle triple*, *angle quadruple*, etc.

Si l'on coupe un dièdre par un plan incliné sur son arête, il en résulte deux trièdres complétant le dièdre proposé et que pour cette raison j'appelle *trièdres complémentaires*. — Pour construire le trièdre complémentaire d'un trièdre donné, il suffit de prolonger au-delà du sommet une arête de ce dernier. — On voit que deux trièdres complémentaires ont un dièdre égal, la face opposée égale, tandis que les deux autres dièdres et les deux autres faces du premier sont les suppléments respectifs des deux autres dièdres et des deux autres faces du second. — Enfin, deux trièdres séparés sont complémentaires dans tous les cas analogues à ceux où ils sont égaux.

Nous avons fait voir en Géométrie quelles sont les conditions *nécessaires* pour que deux angles solides soient *égaux* ou *symétriques* et nous avons prouvé qu'*un angle solide convexe ne peut avoir qu'un seul symétrique coïncidant avec l'angle solide opposé au sommet du premier*. — Nous avons aussi démontré l'*équivalence* de deux trièdres *symétriques ;* mais voici une démonstration plus directe.

Théorème. — *Deux angles trièdres symétriques ne sont pas égaux, mais sont équivalents entre eux* (fig. 6).

Soit le trièdre SABC et son opposé au sommet S*abc* : ces deux trièdres symétriques ne sont pas égaux, vu qu'il est impossible de les faire coïncider l'un avec l'autre s'ils ne sont pas *isoèdres*. Mais je dis qu'ils sont équivalents entre eux.

Prenons les six longueurs SA, S*a*, SB, S*b*, SC, S*c* toutes égales entre elles, et joignons leurs extrémités par des droites : nous formerons six triangles isocèles égaux deux à deux et opposés au sommet S commun ; car ils auront deux à deux un angle égal compris entre côtés égaux. D'où il suit que les deux côtés AB et *ab* sont égaux et parallèles, aussi bien que les

deux côtés AC, *ac* et les deux BC, *bc*. Donc les deux triangles ABC, *abc*, sont égaux et leurs plans parallèles.

Par le point S menons D*d* perpendiculaire au plan ABC et par conséquent à son plan parallèle *abc* : comme les intersections AD et *ad* de ces deux plans par le même troisième ADS*da* sont parallèles, il est clair que les deux triangles rectangles SAD et S*ad* sont égaux, comme ayant les hypothénuses SA, S*a* égales et adjacentes à deux angles égaux chacun à chacun ; donc SD= S*d*. Mais de là résulte que les six triangles rectangles SAD, SBD, SCD, S*ad*, S*bd*, S*cd* sont égaux entre eux ; donc les six droites DA, DB, DC, *da*, *db*, *dc* sont égales entre elles. Donc les pieds D et *d* sont les centres des deux cercles égaux circonscrits aux deux triangles égaux ABC, *abc* ; et cela serait encore évidemment si les pieds D et *d* tombaient dans les intérieurs de ces triangles.

Maintenant, les deux triangles isocèles DAB et *dab* sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Mais pour faire coïncider ces deux triangles, il faut d'abord que *dab* fasse une demi-révolution autour de *ab*. Plaçant alors le point *d* sur le point D et le côté *da* sur son égal DB, il est clair que le côté *db* suivra son égal DA, et qu'ainsi les deux triangles coïncideront. Mais alors *d*S, perpendiculaire en *d* sur le plan *dab*, le sera en D sur le plan DAB, et coïncidera avec son égale DS, aussi perpendiculaire en D sur ce plan. Donc le trièdre isoèdre S*dab* coïncide avec le trièdre isoèdre SDAB et lui est égal. On verra de même que les deux trièdres S*dbc* et SDBC sont égaux, aussi bien que les deux S*dac* et SDAC On a donc

$$\text{S}dab + \text{S}dbc - \text{S}dac = \text{SDAB} + \text{SDBC} - \text{SDAC}.$$

Or, le premier membre de cette égalité fournit le trièdre S*abc*, tandis que le second membre donne le trièdre SABC. Donc enfin les deux trièdres symétriques SABC et S*abc* sont équivalents entre eux.

Corollaire I. — *Deux angles polyèdres symétriques sont équivalents entre eux* ; car ils sont composés du même nombre de trièdres symétriques et équivalents chacun à chacun.

II. — Soient I, H, K les milieux des côtés AB, BC, AC, bases communes à trois couples de triangles isocèles : il est

facile de voir que : *La droite* SD *est l'intersection commune aux trois plans* SID, SHD *et* SKD *respectivement perpendiculaires aux trois faces du trièdre* SABC *et menés par les bissectrices de ces faces.* De plus, comme SD fait avec les trois arêtes des angles égaux, tout point D de cette droite est également distant de ces trois arêtes.

Égalité et symétrie des trièdres. — Pour que deux angles trièdres soient égaux ou symétriques, il faut que les six parties *homologues*, dièdres et faces angulaires, soient égales chacune à chacune et disposées dans le même ordre ou dans l'ordre inverse en passant d'un trièdre à l'autre : telles sont les six conditions *nécessaires ;* mais trois de ces conditions sont *suffisantes*, savoir les égalités de trois parties homologues.

Théorème. — *Deux angles trièdres sont égaux ou symétriques lorsqu'ils ont*, 1° *un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune ;* 2° *une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun.*

Chaque fois, en effet, on peut aisément faire coïncider l'un des deux angles trièdres proposés avec l'autre ou avec son opposé au sommet, en procédant comme pour deux triangles rectilignes.

Corollaire. — Aux faces égales sont opposés des dièdres égaux, et réciproquement.

Théorème. — *Deux angles trièdres sont égaux ou symétriques lorsqu'ils ont les trois faces angulaires égales chacune à chacune* (fig. 6 et une autre à tracer).

Soient SABC et S'A'B'C' les deux trièdres dans lesquels l'angle ASB = A'S'B', l'angle ASC = A'S'C' et l'angle BSC = B'S'C'. — Prenons les six longueurs SA, SB, SC, S'A', S'B' et S'C' toutes égales entre elles ; puis menons sur les plans ABC, A'B'C' les perpendiculaires SD, S'D' : on verra, comme plus haut, que les deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux, que les pieds D, D' sont les centres des deux cercles égaux circonscrits à ces deux triangles, et qu'enfin SD = S'D'.

Cela posé, 1° si les faces égales sont disposées *dans le même ordre* d'un trièdre à l'autre, on fera coïncider directement les deux triangles égaux ABC et A'B'C' ; les deux cercles circonscrits et leurs centres D, D' ; les deux perpendiculaires égales

DS, D'S', et par suite les deux trièdres proposés SABC, S'A'B'C'. Donc ces deux trièdres sont égaux.

2° Si les faces égales sont *inversement* disposées, il est clair qu'après une demi-révolution autour de A'B', par exemple, le trièdre S'A'B'C' peut coïncider directement avec le trièdre S*abc*, symétrique de SABC. Donc les deux trièdres SABC et S'A'B'C' sont symétriques; et dans ce cas comme dans le cas précédent, aux faces angulaires égales sont opposés les dièdres égaux.

Corollaire. — *Deux trièdres sont égaux ou symétriques lorsqu'ils ont les arêtes parallèles chacune à chacune, et dirigées à la fois dans le même sens ou à la fois en sens contraires.* — Alors en effet, les faces angulaires des deux trièdres sont égales chacune à chacune et disposées dans le même ordre ou dans l'ordre inverse en passant d'un trièdre à l'autre.

Remarque I. — Si deux couples d'arêtes parallèles sont dirigées dans les mêmes sens et les deux autres arêtes parallèles en sens contraires, les deux trièdres sont *complémentaires* (facile à démontrer).

II. — Si l'on ne voulait établir l'équivalence de deux trièdres symétriques que dans la *Géométrie sphérique*, ce qui n'est pas à préférer, on démontrerait aussi très-simplement le théorème ci-dessus comme nous l'avons fait en 1822 dans les *Mélanges de mathématiques*. Après avoir pris alors les six arêtes des deux trièdres toutes égales entre elles, les trois faces étant égales chacune à chacune, on prouvera l'égalité des deux dièdres homologues SA et S'A' en plaçant sur leurs arêtes les sommets M et M' des angles qui mesurent ces deux dièdres de telle sorte qu'on ait AM=A'M', etc. C'est le procédé aussi employé dans la Géométrie de M. Blanchet, édition de 1854.

Problème. — *Un angle trièdre quelconque étant donné, construire le trièdre supplémentaire.* (fig. 7.)

Deux angles trièdres sont dits *supplémentaires* lorsque les faces de l'un sont les suppléments des angles qui mesurent les dièdres opposés de l'autre.

Soit SABC le trièdre proposé et soit M un point quelconque de l'intersection commune des plans perpendiculaires aux trois faces, menés par les bissectrices de ces dernières. Du point M menons les perpendiculaires MN, MP et MO aux trois faces ASC, ASB et BSC :

les pieds N, P, O tombent nécessairement sur les bissectrices de ces faces. Or, je dis que le trièdre MNPO, ainsi construit, est supplémentaire du trièdre SABC.

D'abord le plan PMN passe par les perpendiculaires MN, MP aux plans ASC, ASB ; il est donc perpendiculaire à ces deux plans et à leur intersection SA, qu'il rencontre au point I. De sorte que l'angle NIP mesure le dièdre SA. Mais dans le quadrilatère MNIP, les angles N et P sont droits ; donc les deux angles restants NMP et NIP sont supplémentaires ; c'est-à-dire que chaque face du trièdre M, telle que NMP, est le supplément de l'angle NIP qui mesure le dièdre opposé SA du trièdre S.

Réciproquement, il est clair que l'angle IPH mesure le dièdre MP. Mais dans le quadrilatère SIPH, les angles I et H. sont droits ; donc les deux angles restants ASB et IPH sont supplémentaires ; c'est-à-dire que chaque face ASB du trièdre S est le supplément de l'angle IPH qui mesure le dièdre opposé MP du trièdre M. Donc enfin, les deux angles trièdres S et M, sont supplémentaires.

Remarque. — On a donné différentes solutions de ce problème : toutes supposent que dans l'intérieur du trièdre S, il existe un point M, d'où menant des perpendiculaires aux trois faces, les pieds tombent sur ces faces elles-mêmes, et de plus que les perpendiculaires menées de chaque pied sur les côtés de la face dont il est un point, rencontrent ces côtés et non leurs prolongements, lorsque cette face est un angle obtus. Or, plusieurs Professeurs pensent que ces deux propositions doivent être démontrées; et c'est ce qu'on vient de faire dans la précédente solution, laquelle est ainsi complète.

Corollaire. — Il résulte de la propriété des trièdres supplémentaires que : dans tout trièdre, la somme des angles plans mesurant les trois dièdres est toujours plus grande que deux et plus petite que six angles plans droits.

Théorème. — *Deux angles trièdres sont égaux ou symétriques lorsqu'ils ont les trois dièdres égaux chacun à chacun.*

La construction des deux trièdres supplémentaires démontre aisément ce quatrième et dernier cas de l'égalité ou de la symétrie des deux angles trièdres proposés. Voyez la Géométrie 4^{me} édition.

Propriétés des trièdres. — Les propriétés des angles triples

se déduisent très-simplement des propriétés correspondantes des triangles sphériques. Mais il est préférable, pour compléter la théorie des angles solides, d'y établir leurs propriétés, lesquelles d'ailleurs sont les sujets d'utiles exercices.

I. — *Dans tout trièdre isoèdre*, 1° *la bissectrice de la base et l'arête opposée sont dans un plan perpendiculaire à cette base ;* 2° *ce plan est bissecteur du dièdre opposé à celle-ci ;* 3° *enfin, les dièdres opposés aux deux faces angulaires égales sont égaux entre eux.* — Cela résulte de ce que le plan divise le trièdre proposé en deux trièdres symétriques, comme ayant les trois faces égales chacune à chacune. On voit d'ailleurs que si les deux angles plans égaux sont aigus, droits ou obtus, les deux trièdres égaux opposés sont aussi aigus, droits ou obtus.

II. — *Réciproquement, un trièdre est isoèdre,* 1° *lorsque le plan de la bissectrice de la base et de l'arête opposée est perpendiculaire à cette base ;* 2° *lorsque le plan bissecteur du dièdre opposé à la base est perpendiculaire à celle-ci ;* 3° *enfin, lorsque deux angles dièdres sont égaux entre eux.* — Dans 1° et 2°, le plan divise le trièdre proposé en deux trièdres symétriques rectangles ; et pour démontrer 3°, les deux dièdres égaux SA et SB étant aigus dans le trièdre proposé ; d'un point C de l'arête SC, on mène CO perpendiculaire au plan ASB, puis du pied O les perpendiculaires OI et OH sur SA et SB ; etc. Mais si les deux dièdres égaux sont obtus, leurs suppléments sont aigus, etc.

III. — Un trièdre est dit *régulier* lorsque ses trois faces sont égales entre elles et les trois dièdres égaux entre eux. Or, l'égalité des faces entraîne celles des dièdres, et réciproquement. — Suivant que les trois faces sont des angles aigus, droits ou obtus, le trièdre proposé est lui-même aigu, droit ou obtus.

IV. — *Dans tout trièdre* SABC, *au plus grand des deux dièdres est opposée la plus grande des deux faces ; et réciproquement.* — Si le dièdre SA est plus grand que le dièdre SB, celui-ci en est donc une partie. Soit donc BSAE cette partie égale au dièdre SB : il est clair que la droite SE est située dans l'angle BSC, etc.

V. — *Si deux angles triples ont un dièdre inégal compris entre deux faces égales chacune à chacune, au plus grand des deux dièdres est opposée la plus grande des deux troisièmes faces. La réciproque est vraie.* — On prend les six arêtes toutes égales entre elles ; on place les angles mesurant les dièdres proposés de telle sorte que leurs sommets soient également éloignés des sommets des deux trièdres, etc.

VI. Dans tout trièdre il existe quatre droites intérieures issues du sommet et intersections communes à quatre systèmes de trois plans, savoir : 1° ces plans sont perpendiculaires aux trois faces et menés par les bissectrices de celles-ci ; 2° ils sont bissecteurs des trois dièdres ; 3° chacun joint une arête et la bissectrice de la face opposée ; 4° enfin, ils sont perpendiculaires aux trois faces et menés par les arêtes opposées.

Si les trois faces sont égales entre elles, les quatre droites se confondent en une seule dont chaque point est également éloigné, soit des trois faces, soit des trois arêtes.

VII. — *Tout trièdre équivaut à l'excès de la demi-somme de ses trois dièdres sur un dièdre droit.*

Considérons le trièdre SABC et prolongeons ses trois arêtes en A',B',C'. Désignons par a, b, c, les angles dièdres SA, SB, SC et par d le dièdre droit : il est évident que : SABC + SA'BC = a, SABC+SAB'C= b et SABC+SABC'= c.

Ajoutant ces égalités membres à membres, en observant que les deux trièdres symétriques SABC' et SA'B'C sont équivalents, et que les trièdres SABC, SA'BC, SAB'C, SA'B'C remplissent exactement la moitié de l'espace ou deux dièdres droits, c'est-à-dire 2 d, on aura

$$2\,\mathrm{SABC} + 2\,d = a + b + c\,;\ \text{d'où}\ \mathrm{SABC} = \frac{1}{2}(a + b + c) - d.$$

VIII. — Dans tout angle solide *régulier*, c'est-à-dire ayant toutes ses faces angulaires égales et tous ses dièdres égaux, les plans bissecteurs de ces dièdres se coupent suivant une même droite issue du sommet et faisant des angles plans égaux, soit avec les arêtes, soit avec les faces. Cette droite intérieure est appelée *axe* de l'angle solide. De plus, tout plan perpendiculaire à cet axe coupe l'angle polyèdre proposé suivant un polygone régulier ; etc.

De la comparaison des Polyèdres.

Symétrie et similitude de deux polyèdres. — On compare deux polyèdres pour savoir s'ils sont ou *égaux*, ou *équivalents*, ou *symétriques l'un de l'autre*. On les compare encore pour s'assurer qu'ils sont *directement* ou *inversement semblables*. Or, bien que la théorie du mesurage des polyèdres puisse se passer de la

théorie de leur symétrie, je pense néanmoins que la *symétrie* et la *similitude inverse* de deux polyèdres doivent figurer dans les éléments de Géométrie, tout aussi bien que leur *égalité* et leur *similitude directe*. Dailleurs ces différentes théories deviennent les plus simples possibles par les définitions que voici :

On appelle *symétriques l'un de l'autre*, ou simplement *symétriques*, deux polyèdres ayant les faces *correspondantes* ou *homologues* égales et les angles dièdres homologues égaux, les parties égales étant *inversement disposées* en passant d'un polyèdre à l'autre. De sorte que les angles solides homologues sont symétriques.

On nomme *directement semblables*, ou simplement *semblables*, deux polyèdres dont les angles dièdres homologues sont égaux et les faces homologues semblables, les parties homologues étant *disposées dans le même ordre* en passant de l'un des deux polyèdres à l'autre. Donc les angles solides homologues sont égaux ; et de plus, si deux côtés homologues étaient égaux, il en serait de même des deux polyèdres. — On voit que l'*égalité* n'est qu'une particularité de la *similitude*.

Enfin, j'appelle *inversement semblables* deux polyèdres ayant les faces homologues semblables et les angles dièdres homologues égaux, les parties homologues étant *inversement disposées* quand on passe de l'un des deux polyèdres à l'autre. Donc leurs angles solides homologues sont symétriques ; et il en serait de même des deux polyèdres, si deux côtés homologues étaient égaux.

Remarque I. — Chacune des définitions précédentes énonce les *conditions nécessaires* à l'existence des deux polyèdres définis et en donne l'idée complète. Quant à la théorie des deux polyèdres, elle a pour but de faire connaître les *conditions suffisantes* à leur existence et d'en déduire les propriétés descriptives et autres. Il en résulte différents théorèmes, les uns *nécessaires* et les autres *utiles* comme exercices pour une étude plus complète et plus approfondie.

II. Dans le Complément de trigonométrie j'ai démontré la construction et par conséquent l'existence des couples de polyèdres définis ci-dessus, en n'employant que les *données* ou les *conditions suffisantes ;* et chaque construction n'exigeant le tracé *effectif* d'aucune figure est en même temps la plus générale et la plus simple. — Cependant pour mieux fixer les idées en mettant les figures sous les yeux, j'ai tracé dans le traité de Géométrie chaque

couple de polyèdres d'après les procédés théoriques les plus faciles.

III. — La définition des polyèdres semblables montre clairement que ces deux polyèdres ne *diffèrent que par leurs grandeurs* et que l'un est exactement *en petit* ce que l'autre est *en grand*. Le premier ou la *copie* représente donc le second ou le *modèle* et en tient absolument lieu pour l'étude des propriétés et pour les opérations graphiques et numériques. — Il en est de même des deux polyèdres inversement semblables, l'un étant *inversement en petit* ce que l'autre est *directement en grand*. La copie représente encore le modèle pour l'étude et les opérations; mais celles-ci doivent s'effectuer dans l'*ordre inverse* quand on veut déterminer l'un des deux polyèdres au moyen de l'autre.

IV. — Les théories des polyèdres égaux et semblables conduisent aisément à celles des polyèdres symétriques l'un de l'autre et inversement semblables. Voilà sans doute pourquoi ces deux dernières théories ne sont pas exigées dans le programme d'études des lycées de France, publié en 1852. Cela simplifie d'autant le cours de Géométrie élémentaire ; mais il importe que du moins ces deux théories soient indiquées dans l'enseignement et données aux élèves comme exercices utiles.

Le même programme, répétant la définition de Lacroix, appelle *polyèdres semblables* deux polyèdres compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune et dont les angles polyèdres homologues sont égaux. Cette définition rentre dans celle énoncée plus haut, la seule qui fasse bien connaître la *similitude*, c'est-à-dire l'*identité de formes* des deux polyèdres inégaux proposés.

Le programme ci-dessus ne fait pas mention des figures *symétriques* en elles-mêmes, c'est-à-dire ayant chacune un *centre*, un ou plusieurs *axes* et un ou plusieurs *plans de symétrie*. Mais rien n'empêche le Professeur de faire connaître aux élèves les propriétés de ces figures, lesquelles reçoivent d'utiles applications.

V. — Enfin, j'observe que la théorie du mesurage des prismes devient plus simple en démontrant, comme je l'ai fait en Géométrie, le théorème sur l'équivalence des parallélipipèdes. Voici ce théorème et sa démonstration faite sur une figure mieux appropriée à ce sujet.

Théorème. — *Tout parallélipipède oblique est équivalent au parallélipipède rectangle de même hauteur et de base équivalente* (fig. 8).

Soit AG ou P_1 le parallélipipède oblique proposé. Prolongeons les côtés BA, CD, FE et GH. Sur le prolongement de BA prenons IK = BA, puis par les points I et K menons à la droite BK et à ses parallèles les plans perpendiculaires IMNQ et KLOP. Ces deux plans sont évidemment deux parallélogrammes égaux et parallèles ; le volume résultant est donc un parallélipipède P_2 dont les deux bases IKLM et QPON sont deux rectangles.

A cause de KI = AB, il est clair qu'en ajoutant IA de part et d'autre on aura KA = IB. De même on aura LD = MC, PE = QF et OH = NG. Faisant donc coïncider la face KLOP avec son égale IMNQ, il est clair que les droites égales KA et IB, perpendiculaires en K et I sur ces deux faces, coïncideront aussi. De même LD coïncidera avec MC, PE avec QF et OH avec NG. Donc les deux polyèdres KLOPAEHD et IMNQBCGF sont égaux. Et comme ils ont une partie commune AIMDEQNH, les deux parallélipipèdes restants P_2 et P_1 sont équivalents. Ils ont évidemment hauteurs égales et bases équivalentes IKLM, ABCD.

Par les parallèles KI et LM menons les plans KITU et LMSR perpendiculaires au rectangle KLMI : nous formerons ainsi le parallélipipède rectangle KS ou P_3. Or, les deux triangles rectangles, KPU et LOR étant égaux, il en est de même des deux prismes triangulaires droits KPUIQT et LORMNS, lesquels peuvent coïncider en un seul. Si donc du polyèdre KN on retranche successivement ces deux prismes droits, les deux restes successifs sont P_3 et P_2 ; donc ces deux parallélipipèdes P_3 et P_2 sont équivalents. Mais déjà P_1 est équivalent à P_2 ; donc aussi le parallélipipède oblique P_1 est équivalent au parallélipipède rectangle P_3 de même hauteur et de base équivalente.

Corollaire. — Puisque les deux polyèdres KLPEAD, IMQFBC peuvent coïncider entièrement, il est clair qu'en retranchant de chacun la partie commune IMQEAD, il reste le prisme triangulaire droit KLPQIM équivalent au prisme triangulaire oblique ADEFBC. De même le prisme triangulaire droit LOPQMN est équivalent au prisme triangulaire oblique DHEFCG. Or, les deux prismes triangulaires droits, ayant bases égales et les arêtes latérales d'égales longueurs, peuvent coïncider et sont égaux ; par suite les deux prismes triangulaires obliques, qu'on ne saurait faire coïncider l'un avec l'autre, sont équivalents. Ainsi *le plan diagonal* DCFE *de tout parallélipipède oblique le divise en deux prismes triangulaires obliques équivalents entre eux.*

De plus, ADHE et ADE étant les bases du parallélipipède AG et du prisme triangulaire ADEFBC, on voit que : *Tout prisme triangulaire oblique est la moitié du parallélipipède construit sur les trois mêmes arêtes contiguës, c'est-à-dire ayant la même hauteur et une base double.*

Remarque I. — Il est facile de voir que la surface de P_3 est moindre que la surface de P_1, tandis que la somme des douze arêtes de P_3 est plus petite que la somme des douze arêtes de P_1.

II. — La méthode des parties égales démontre très-simplement que : *Deux parallélipipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Il en résulte ensuite, comme on sait, les expressions des volumes de tout parallélipipède rectangle, de tout parallélipipède oblique et de tout prisme triangulaire ou polygonal.

III. — Quant à l'expression du volume de toute pyramide, on sait que le théorème des variables y conduit directement par la voie logique la plus simple et à l'aide de calculs algébriques fort élémentaires. — Le calcul fournit aussi très-simplement l'expression du volume de toute pyramide tronquée, à bases parallèles ; et ce procédé me paraît préférable à celui qu'on emploie ordinairement.

IV. — Si les trois côtés de la base de tout tétraèdre T sont égaux à a, tandis que les trois arêtes du sommet sont égales à b, l'expression du volume T est

$$T = \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Ce théorème conduit à exprimer le volume du Rhomboèdre *obtus* et du Rhomboèdre *aigu* en fonction des deux diagonales de l'un des six losanges égaux qui le terminent. — De plus, si $b = a$, le tétraèdre est *régulier* et il vient $T = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

V. — Le mesurage des prismes et des pyramides conduit au mesurage des polyèdres et donne quatre formules pour exprimer le volume, soit de tout prisme triangulaire tronqué, soit du tronc de tout parallélipipède. Le volume de ce tronc a même une cinquième expression, savoir : *La demi-somme des aires de deux trapèzes opposés multipliée par leur distance numérique.* De plus si la base hexagonale de tout prisme a un *centre de symétrie*, il en est de même de la section non parallèle, *base supérieure* du

prisme tronqué résultant. Or, le volume de ce tronc a pour mesure, 1° le produit des mesures de la base inférieure et de la distance de cette base au centre de la base supérieure ; 2° l'aire de la section perpendiculaire aux arêtes latérales multipliée par la longueur de la droite d joignant les centres des deux bases. — Dans ce dernier cas, si la section est perpendiculaire au milieu de d, elle divise le prisme tronqué et sa surface latérale chacun en deux portions équivalentes.

VI. — Pour compléter l'analogie entre le triangle rectangle et le tétraèdre ayant un trièdre droit, il est bon d'exercer les élèves à démontrer les théorèmes que voici :

Dans tout tétraèdre rectangle, si les quatre faces sont exprimées en nombres de la même unité superficielle, le carré numérique de la face *hypoténuse*, ou opposée au trièdre droit, est égal à la somme des carrés numériques des trois autres faces.

Dans tout tétraèdre rectangle, si les quatre faces numériques sont les bases de quatre prismes dont les hauteurs numériques sont proportionnelles à ces bases, le prisme construit sur l'hypoténuse vaut la somme des trois autres prismes. — Théorème analogue pour quatre tétraèdres.

VII. — *Deux tétraèdres ayant un trièdre égal, symétrique ou complémentaire, sont entre eux comme les produits des trois arêtes numériques de ce trièdre dans l'un et dans l'autre.*

Ce théorème général doit se démontrer dans les éléments de Géométrie, car il en résulte d'abord que : *Deux tétraèdres semblables directement ou inversement sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.* Il en résulte ensuite que dans le tétraèdre SABC, si l'on prolonge au-delà du sommet S chacune des arêtes latérales de telle sorte qu'on ait AS = SM, BS = SN et CS = SP, les quatre tétraèdres SMBC, SNAC, SPAB et SMNP, ainsi obtenus, sont équivalents entre eux et au proposé.

On sait d'ailleurs que deux tétraèdres et par suite deux polyèdres symétriques l'un de l'autre sont équivalents entre eux.

VIII. — On démontre aisément que : *Dans deux polyèdres semblables directement ou inversement, les surfaces sont entre elles comme les carrés de deux côtés homologues, et les volumes entre eux comme les cubes des mêmes côtés.*

On a donc ainsi deux proportions pour calculer la surface et le volume de l'un des deux polyèdres à l'aide de la surface et du volume de l'autre, mais donnés numériquement aussi bien que les deux côtés homologues.

Le précédent théorème sert à démontrer celui-ci : Lorsque deux polyèdres semblables sont construits d'après une certaine *échelle*, 1° deux côtés homologues quelconques sont exprimés par le même nombre d'unités linéaires relatives au *modèle* et à sa *copie* réduite ; 2° Les surfaces semblables des deux polyèdres sont exprimées par le même nombre d'unités superficielles relatives, carrés faits sur les unités linéaires ; 3° enfin, les volumes des deux polyèdres sont aussi exprimées par le même nombre d'unités relatives, cubes faits sur les unités linéaires. Donc *pour mesurer le modèle, il suffit de mesurer la copie directe.* Et c'est ainsi que les valeurs numériques de deux figures semblables, construites d'après une échelle donnée, se déduisent immédiatement l'une de l'autre.

De là on voit que *la copie directe représente complétement le modèle en forme et en étendue.* — On verrait de même que *la copie inverse représente complètement le modèle en étendue et en forme symétrique.*

Ces deux propositions doivent figurer dans les éléments de Géométrie pour y faire bien connaître l'importance de la similitude, soit directe soit inverse.

Mesurage des aires et des volumes de révolution.

On a vu plus haut comment la méthode infinitésimale fait passer immédiatement du connu à l'inconnu et conduit, par la voie logique la plus claire et la plus simple, à tous les théorèmes relatifs aux proportions et au mesurage dans le cercle et les corps ronds. Mais on peut encore généraliser la théorie du mesurage des aires et des volumes de révolution, à l'aide des expressions de la surface latérale et du volume de tout cône droit circulaire tronqué dont les bases sont parallèles ; et à cet effet, il faut d'abord résoudre les deux problèmes que voici :

Problème I. — *Calculer la surface engendrée par la révolution de la base d'un triangle isocèle autour d'un axe extérieur et dans le même plan* (fig. 9 et 10).

Soit le triangle isocèle ABC = T, dont la base AB = b et la hauteur CI = h. Soit p la projection orthogonale GF de la base b sur l'axe extérieur UM, les droites projetantes étant AG = m et BF = n. Menant CN et BO parallèles à UM, puis les perpendiculaires CE = d et IR au même axe, on aura BO = PQ = FG = p et AO = $m-n$. On sait d'ailleurs que *surf.* $b = b \cdot 2\pi$IR.

Or, suivant que le sommet C est entre b et UM ou b entre UM et C, on a

$$\text{IR} = d \pm \text{IH} \text{ ; d'où } \textit{surf.}\ b = b \cdot 2\pi d \pm b \cdot 2\pi \text{IH}.$$

Les deux triangles semblables ABO et CIH donnent $b \cdot \text{IH} = hp$. On a donc

$$\textit{Surf.}\ b = b \cdot 2\pi d \pm p \cdot 2\pi h \text{ ;... (1)}$$

le signe + du double signe a lieu pour C entre l'axe et b, tandis que le signe — répond à b entre C et l'axe MU.

PROBLÈME II. — *Calculer le volume engendré par la révolution de l'aire* T *du triangle isocèle* ABC *autour de l'axe extérieur* UM *et dans le même plan.*

Conservant les constructions et les dénominations du précédent problème, N étant le point où le prolongement de AB va rencontrer la parallèle CN à UM et la perpendiculaire NM étant égale à la distance CE $= d$. Supposons d'abord le triangle T quelconque : il est clair que *vol.* T est la différence des volumes engendrés par les révolutions autour de MU des deux pentagones CANME et CBNME, ces derniers volumes étant chacun la somme de deux cônes droits tronqués à bases circulaires parallèles. Par suite on trouve

$$\textit{Vol.}\ \text{T} = \frac{1}{3}\pi \cdot \text{CN}\ (m - n)(m + n + d).$$

Ici le pied I de la hauteur CI ou h du triangle CAB $=$ T n'est pas le milieu de la base b ; mais les deux triangles ABO et CIN ne sont pas moins semblables et donnent $\text{CN} \cdot (m - n) = b\,h = 2\text{T}$. Substituant on a

$$\textit{Vol.}\ \text{T} = \text{T} \cdot \frac{2}{3}\pi\ (m + n + d) = \text{T} \cdot 2\pi \text{k}.$$

k désignant la distance du centre de gravité de T à l'axe MU. Ainsi *le volume engendré par la révolution de tout triangle autour d'un axe extérieur et dans le même plan, a pour mesure l'aire de ce triangle multipliée par la circonférence numérique que décrit son centre de gravité.*

Maintenant, si le triangle T est isocèle, le pied I est le milieu de b et l'on a $\text{IR} = \frac{1}{2}(m+n) = d \pm \text{IH}$. Donc

$$Vol.\ \mathrm{T} = \mathrm{T}.2\pi d \pm \mathrm{T}.\frac{4}{3}\pi.\mathrm{IH}.$$

D'ailleurs $\mathrm{T} = \frac{1}{2} b\, h$ et les deux triangles semblables ABO, CIH donnent $b.\mathrm{IH} = h\, p$; donc enfin

$$Vol.\ \mathrm{T} = \mathrm{T}.2\pi d \pm p.\frac{2}{3}\pi h^2\ ;\ \ldots\ (2)$$

le signe + du double signe ayant lieu pour C entre b et l'axe, tandis que le signe — répond à b entre l'axe et le sommet C.

Observez d'ailleurs que les doubles formules (1) et (2) sont vraies encore lorsque la base b est parallèle à l'axe MU.

Théorème. — Soit S le secteur circulaire dont T fait partie ; soit r son rayon, a son arc et p la projection de celui-ci sur l'axe MU, d désignant toujours la distance de cet axe au centre C. Si a et S font une révolution autour de l'axe proposé, je dis qu'on aura

$$Surf.\ a = a.2\pi d \pm p.2\pi r,\ \ldots\ (3)$$

$$Vol.\ \mathrm{S} = \mathrm{S}.2\pi d \pm \frac{2}{3} p.\pi r^2\ ;\ \ldots (4)$$

le signe + du double signe répondant à l'arc *a concave* et le signe — à l'arc *a convexe* vers l'axe proposé.

Ce théorème est conséquence immédiate des doubles formules (1) et (2). Car le secteur S est la somme d'une infinité de triangles isocèles égaux, ayant chacun r pour hauteur et pour bases respectives les éléments rectilignes de l'arc a, la projection p étant la somme des projections de ces éléments.

D'ailleurs, il est évident que *surf.* a s'exprime avec a, d, p et r absolument comme *surf.* b avec b, d, p et h. De même, *vol.* S se détermine avec S, d, p et r absolument comme *vol.* T avec T, d, p et h. — Tels sont deux usages de *l'axiôme de généralisation* en Géométrie.

Corollaire. — Soit S' le segment circulaire, égal à S — T ; soit c sa corde donnant $\frac{1}{4} c^2 = r^2 - h^2$. A cause de *vol.* S' = *vol.* S — *vol.* T, il est clair qu'on a

$$Vol.\ \mathrm{S}' = \mathrm{S}'.2\pi d \pm \frac{1}{6} p.\pi c^2.\ \ldots (5)$$

Remarque I. — Lorsque $d = o$, l'arc a est concave vers l'axe proposé, diamètre extérieur ; et alors les formules précédentes expriment l'aire de toute *zône*, le volume de tout *secteur sphérique* et le volume engendré par la révolution de tout segment circulaire S' autour d'un diamètre extérieur. De sorte que *vol.* S' *est le plus grand possible lorsque la corde donnée* c *est parallèle à l'axe diamètre*. Dans ce cas, la zône à deux bases est aussi un *maximum* absolu.

II. — On sait que l'expression de l'aire de toute zône en fournit deux pour *l'aire de la surface sphérique*, et que l'expression du volume de tout secteur sphérique en fournit aussi deux pour le *volume de la sphère*. D'ailleurs, ces doubles expressions sont données par les formules (3) et (4) en y posant $d = o$ et $p = 2r$.

III. — Lorsque l'arc a est en partie *concave* et en partie *convexe* vers l'axe de rotation, ce qui a lieu lorsque la corde c du segment circulaire S' est perpendiculaire à cet axe extérieur, il faut considérer séparément ces deux parties. Et comme dans ce cas *surf.* $a = surf.\ \frac{1}{2}\ a + surf.\ \frac{1}{2}\ a$; tandis que *vol.* $S' = vol.\ \frac{1}{2}\ S' + vol.\ \frac{1}{2}\ S'$, il est clair qu'on aura, réductions faites :

$$Surf.\ a = a.\ 2\pi d \text{ et } vol.\ S' = S'.\ 2\pi d. \ \ldots (6)$$

IV. — Si dans les deux formules précédentes, on a $p = 2r$, d'où $a = 2\pi r$ et $S' = \pi r^2$, il est clair qu'on aura

$$Surf.\ 2\pi r = 2\pi r.\ 2\pi d = 4\pi^2 dr, \ \ldots (7)$$

$$Vol.\ \pi r^2 = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 dr^2. \ \ldots (8)$$

Telles sont les expressions de la surface et du volume de l'*anneau rond* engendré par la révolution de tout cercle autour d'un axe extérieur et dans le même plan. Mais il faut bien observer que d ne saurait être moindre que r.

V. — Les formules (4) servent à démontrer le théorème que voici : Soit L l'aire de la *lunule* ayant pour côtés, 1° le quadran AB du cercle dont O est le centre et OA=OB=a le rayon ; 2° la demi-circonférence extérieure décrite sur la corde AB comme diamètre ; d'où $L = \frac{1}{2}\ a^2$. Si la figure fait une révolution autour de OA, on aura vol. $L = \frac{1}{4}\pi^2\ a^3$. — On peut aussi calculer la surface décrite par le périmètre de L.

VI. — Dans le cercle de rayon r donné (fig. 11), soit L l'aire de la *lunule* différence des deux segments A' et A dont la corde c prolongée est perpendiculaire à l'axe de rotation, celui-ci

à la distance d du centre proposé : on démontre aisément que P désignant le périmètre $2\pi r$ de L, on a, d n'étant pas moindre que r :

$$Vol.\ \mathrm{L} = \mathrm{L}\cdot 2\pi d \text{ et } surf.\ \mathrm{P} = 4\pi^2 dr \ldots. \quad (9)$$

Théorème. — Soit A l'aire et P le périmètre de toute figure plane *symétrique* par rapport à un centre O, et soit d la distance de ce centre à un axe extérieur, dans le même plan. Si la figure fait une révolution autour de l'axe proposé, on aura

$$Surf.\ \mathrm{P} = \mathrm{P}.2\pi d \text{ et } vol.\ \mathrm{A} = \mathrm{A}\cdot 2\pi d. \ \ldots \ (10)$$

Remarque. — Ce théorème, que j'ai démontré en Géométrie et qu'on démontre aisément, d'après ce qui précède, s'applique à tout parallélogramme, à tout polygone régulier d'un nombre pair de côtés, et par suite au cercle, au double segment circulaire et à différentes rosaces.

Il s'applique encore à toute figure plane *symétrique* par rapport à un *axe*, laquelle est un triangle isocèle, un trapèze isocèle ou composée d'une ou de plusieurs de ces deux figures, comme tout polygone régulier d'un nombre impair de côtés. Mais il faut chaque fois que l'*axe de symétrie* soit parallèle à l'axe extérieur de rotation.

Dans le cas d'un centre les nombres A, P, d restant les mêmes respectivement, les deux formules ci-dessus ne changent point lorsque la figure A, avant ou pendant sa révolution autour de l'axe fixe extérieur, tourne elle-même sur son plan autour du centre O de symétrie. De sorte que la figure A peut ainsi décrire une multitude d'*anneaux* équivalents en volume et en surface, mais de formes très-différentes.

Division en tranches. — La décomposition en tranches parallèles, toutes de la même épaisseur infiniment petite, conduit avec facilité à l'expression du volume cherché ou de l'aire de la figure proposée, à l'aide du calcul et du principe infinitésimal. Mais pour abréger et simplifier le plus possible, *il faut d'abord négliger les termes infiniment petits du second ordre, du troisième, etc.*, lesquels devenant, à la fin du calcul, termes infiniment petits du premier ordre, du second, etc., doivent disparaître du résultat en vertu du principe infinitésimal. — C'est ainsi qu'on trouve clairement et très-simplement l'expression rigoureuse de toute pyramide. Voici d'autres applications.

PROBLÈME. — *Calculer le volume* T *de toute tranche sphérique, connaissant sa hauteur h sur le diamètre* $2r$, *celui-ci étant perpendiculaire aux deux bases parallèles dont a et b sont les rayons donnés.*

A cet effet, b étant $< a$, soit v la distance de b à l'extrémité voisine du diamètre $2r$, ce qui donne $b^2 = v(2r - v)$. Concevons la hauteur h divisée en un nombre infini n de parties égales à x, d'où $h = nx$; puis imaginons par les points de division des petits cercles parallèles aux deux bases de T, les centres étant les points de division de h : il est clair que les plans de ces petits cercles divisent T en n tranches parallèles.

Soit t la m ième de ces tranches à partir de b : à cause de l'épaisseur x infiniment petite, on peut, sans aucune erreur finale, regarder cette tranche comme un cylindre droit circulaire de hauteur x et dont la base, ayant y pour rayon, intercepte sur le diamètre $2r$ le segment $v + mx$. On a donc successivement

$$t = \pi x y^2 \text{ et } y^2 = (v + mx)(2r - v - mx) ;$$
$$\text{d'où } y^2 = b^2 + 2(r - v)mx - m^2 x^2 \text{ et}$$
$$t = \pi [b^2 x + 2(r - v) m x^2 - m^2 x^3].$$

Prenant successivement $m = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant entre elles les n égalités résultantes, en observant que T est la somme des n tranches partielles et que n infini donne $Sn = \frac{1}{2}n^2$, $Sn^2 = \frac{1}{3}n^3$, on trouve, à cause de $h = nx$,

$$T = \pi h [b^2 + (r - v) h - \frac{1}{3} h^2]. \ldots (11)$$

Telle est une première expression de T. Pour calculer la seconde, on a successivement

$$a^2 = (v + h)(2r - v - h) = b^2 + 2(r - v) h - h^2 ;$$
$$\text{d'où } b^2 + (r - v) h = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2} h^2 \text{ et}$$
$$T = \frac{1}{2}\pi h (a^2 + b^2) + \frac{1}{6}\pi h^3. \ldots (12)$$

Telle est la seconde expression cherchée de la tranche sphérique ; et cette seconde expression est la seule démontrée ordinairement.

COROLLAIRE. — Si la tranche T devient le *segment sphérique* S,

ce qui suppose $b = o$ et $v = o$ dans les deux expressions ci-dessus, il vient

$$S = \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3}h\right) \text{ et } S = \frac{1}{2}\pi a^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3 \ldots . \quad (13)$$

Telles sont les deux expressions de tout segment sphérique, ayant h pour hauteur et a pour rayon de la base. La première expression est plus simple que la seconde et doit être employée de préférence : elle est d'ailleurs *calculable par logarithmes*.

II. — Si r et h sont donnés, le *maximum* de la tranche sphérique T a lieu lorsque le milieu de h coïncide avec le centre de la sphère. — C'est ce qu'on démontre en substituant $2rv - v^2$ à b^2 dans la première expression de T, puis en résolvant par rapport à v l'équation résultante du second degré en v.

III. — Le rayon r de la sphère et la hauteur h de la tranche sphérique T étant donnés, la surface totale de cette tranche est un *maximum* absolu lorsque le milieu de la hauteur h coïncide avec le centre de la sphère.

Problème. — *Calculer la surface que le périmètre de toute lunule circulaire engendre par sa révolution autour de la corde commune à ses deux côtés* (fig. 11).

Soit c la corde divisant le cercle, de rayon donné r, en deux segments A′ et A dont les arcs sont a' et a, en supposant A′ > A et $a' > a$. Soit $2d$ la longueur de chacune des deux cordes perpendiculaires aux extrémités de c sur l'axe de la rotation, d étant par suite la distance de cet axe au centre : les deux cordes $2d$ interceptent, sur le diamètre $2r$ parallèle à c, la longueur $l = c$; sur l'arc a' trois arcs dont deux égaux à a_1 et le troisième $a_2 = a$. Donc $a' = 2a_1 + a_2$.

Cela posé, concevons la longueur l ou c divisée en un nombre infini n de parties égales à x par des perpendiculaires : celles-ci divisent la tranche circulaire dont A fait partie en n tranches parallèles, et l'on a $l = c = nx$. Soit t la m ième de ces tranches à partir d'une extrémité de l : il est clair que les deux bases parallèles de t interceptent sur a_2 et a deux arcs égaux infiniment petits v' et v, que l'on peut considérer comme éléments rectilignes sans aucune erreur finale. Ainsi l'axe c divise t en deux trapèzes rectangles inégaux, ayant la hauteur x commune sur c, v' et v étant les deux autres côtés latéraux. De même, c divise en deux parties

inégales y' et y la droite joignant les milieux de v' et v. D'ailleurs y' et y aboutissent au milieu de x; par conséquent on a

$$Surf.\ v' = v.\ 2\pi y' \text{ et } surf.\ v = v.\ 2\pi y.$$

Or, x est un côté de l'angle droit du triangle dont v' est l'hypoténuse, tandis que $y' - d$ et r sont les côtés homologues du triangle semblable. On a donc

$$r : v' = y' - d : x\ ;\ \text{d'où } v'y' = rx + dv'$$

$$\text{et } surf.\ v' = x.2\pi r + v'.2\pi d.$$

Mais comme c est la somme de tous les x et a_2 la somme de tous les v', il est clair qu'on a

$$Surf.\ a_2 = c.2\pi r + a_2.2\pi d.$$

La première formule (6) donne $surf.\ 2a_1 = 2a_1.2\pi d$. Ajoutant donc et observant que $a' = a_2 + 2a_1$, on aura

$$Surf.\ a' = c.2\pi r + a'.2\pi d. \ldots (14)$$

Procédant comme pour $surf.\ a_2$, on trouvera

$$Surf.\ a = c.2\pi r - a.2\pi d. \ldots (15)$$

Soit P le périmètre de la lunule, d'où $P = a, + a = 2\pi r$; il vient enfin

$$Surf.\ P = 4\pi cr + (a' - a).2\pi d. \ldots (16)$$

Telle est la formule cherchée, laquelle exige la *Trigonométrie* pour calculer l'arc a avec les nombres c et r, lorsque cet arc n'est pas connu immédiatement. Mais si l'arc a est le tiers de la circonférence, par exemple, on trouve

$$Surf.\ P = \frac{2}{3}\pi r^2\ (6\sqrt{\ }3 + \pi).$$

Problème. — *Calculer le volume engendré par la révolution de l'aire* L *de toute lunule circulaire autour de la corde commune à ses deux côtés.* (fig. 11).

Conservant les constructions et les dénominations du précédent problème, on aura d'abord $L = A' - A$. De plus, les deux cordes $2d$ divisent A' en trois parties dont deux segments égaux chacun à S' et la troisième désignée par B. De sorte que b dési-

gnant la flèche de chacun des arcs a_1, on aura $A' = B + 2S'$ et $c = 2(r - b)$.

La $m$ième tranche t de B + A est divisée par l'axe c de rotation en deux autres inégales t_1 et t_2, lesquelles ayant la même hauteur x infiniment petite sur c, on peut les regarder comme deux rectangles sans aucune erreur finale, les bases inégales de ces deux rectangles étant désignées par z' et z; d'où $t_1 = x z'$ et $t_2 = x z$. De sorte qu'on a

$$Vol.\ t_1 = \pi x z'^2 \text{ et } vol.\ t_2 = \pi x z^2.$$

Les perpendiculaires $z' - d$ et $z + d$ au diamètre $2r$ sont à la même distance $b + mx$ de l'une de ses extrémités, et ainsi l'on a

$$(z' - d)^2 = (b + mx)(2r - b - mx) = (z + d)^2.$$

Effectuant la multiplication au second membre, on réduira d'après $2(r - b) = c$ et $d^2 = 2br - b^2$. Posant d'ailleurs

$$k = cmx - m^2 x^2,$$

on aura $(z' - d)^2 = d^2 + k$ et $(z + d)^2 = d^2 + k$.

De là $z'^2 = k + 2dz'$ et $z^2 = k - 2dz$, puis

$vol.\ t_1 = \pi kx + t_1 \cdot 2\pi d$ et $vol.\ t_2 = \pi kx - t_2 \cdot 2\pi d$.

Or, $vol.\ (t_1 - t_2) = vol.\ t_1 - vol.\ t_2$; donc

$vol.\ (t_1 - t_2) = (t_1 + t_2).2\pi d$.

Puisque B est la somme de tous les t_1 et A la somme de tous les t_2, il est clair qu'on a

$$Vol.\ (B - A) = (B + A).2\pi d.$$

La seconde formule (6) donne $vol.\ 2S' = 2S' \cdot 2\pi d$. Ajoutant donc et observant que $A' = B + 2S'$, $L = A' - A$ et $A' = \pi r^2$, il vient enfin

$$Vol.\ L = \pi r^2 . 2\pi d = 2\pi^2 dr^2. \ldots (17)$$

Telle est l'expression cherchée du volume engendré par la révolution de l'aire L de toute lunule circulaire autour de la corde commune à ses deux côtés. — On sait donc calculer *vol.* L lorsque c soutend le tiers de la circonférence.

Remarque I. — L'expression de *vol.* L est la même que celle de

l'anneau rond. Mais pour celui-ci, d ne saurait être moindre que r, tandis que pour *vol.* L,d ne saurait surpasser r. Si $d = r$ les deux volumes se confondent en un seul, et c'est alors l'anneau rond *sans vide intérieur*.

II. On peut aussi calculer *vol.* A, *vide intérieur* de *vol.* L. Pour cet effet, substituant la valeur de k trouvée plus haut, on a

$$Vol.\ t_2 = \pi\,(cmx^2 - m^2x^3) - t_2 \cdot 2\pi d.$$

Prenant successivement $m = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$; ajoutant entre elles les n égalités résultantes, en observant que $c = nx$ et que A est la somme de tous les t_2, tandis que n infini donne $Sn = \frac{1}{2}n^2$ et $Sn^2 = \frac{1}{3}n^3$, il viendra

$$Vol.\ A = \frac{1}{6}\pi c^3 - A \cdot 2\pi d. \ \ldots\ (18)$$

Par des calculs analogues on trouve *vol.* B, et par suite

$$Vol.\ A' = \frac{1}{6}\pi c^3 + A' \cdot 2\pi d. \ \ldots\ (19)$$

III. — Enfin, ce qui précède prouve que l'analyse infinitésimale seule peut rendre claire, simple, rigoureuse et complètement générale la théorie du mesurage des aires et des volumes de révolution qu'engendrent des figures planes, mixtes ou curvilignes, terminées ici par différentes combinaisons de lignes circulaires, soit entre elles soit avec des lignes droites. Et quant à l'importance des formules trouvées, elle est mise hors de doute par leur emploi pour calculer les surfaces et les volumes de différents autres corps de révolution.

Propositions relatives aux Aires et aux Volumes.

La théorie des aires et des volumes permet de traiter, sans difficulté, les propositions ci-dessous, que nous indiquons comme exercices utiles d'*Analyse géométrique :*

1. — Soit a l'hypoténuse et c chacun des côtés égaux du triangle isocèle inscrit dans le demi-cercle dont a est le diamètre : il en résulte deux segments circulaires formant une figure. Or, si cette figure fait une révolution autour de l'une des cordes c, démontrer que la surface et le volume engendré valent respectivement le cercle dont a est le rayon et la sphère ayant c pour diamètre.

2. — Dans le triangle isocèle rectangle ABC on connaît les valeurs numériques $2a$ et $2c$ des deux côtés égaux et de l'hypoténuse AC. Les demi-circonférences intérieures, ayant les côtés $2a$ pour diamètres, se coupent mutuellement en deux quadrans au milieu de AC. De plus, le quadran AMC a B pour centre et $2a$ pour rayon. On a donc ainsi la figure F composée du double segment circulaire 2 S et du triangle curviligne T. Or, on démontre que si la figure F fait une révolution autour de AC, le volume engendré a pour mesure $\pi a^2 c(4 - \pi)$. — Calculer l'expression de la surface décrite.

3. — L'arc AMC étant le tiers de la circonférence du rayon r donné, les tangentes en A et C vont se couper en un point D et déterminent le triangle mixte AMCD : quelle est l'expression du volume engendré par la révolution de ce triangle autour de la tangente AD? — Réponse : elle est $\frac{1}{6}\pi r^3 (9\sqrt{3} - 4\pi.)$

4. — L'arc AMC étant le tiers de la circonférence de rayon r donné, la tangente en C rencontre en P le prolongement du diamètre AB, et détermine la figure mixte AMCD : quelle est l'expression du volume engendré par la révolution de cette figure autour de la tangente en A ? — Réponse : $\frac{1}{6}\pi r^3 (9\sqrt{3} + 4\pi)$.

5. — L'arc AMC étant plus petit que la demi-circonférence de rayon r donné, les tangentes en A et C se coupent en un point D et ont la même longueur donnée a. Or, si le triangle mixte AMCD fait une révolution autour du diamètre AB, démontrer que le volume v engendré se calcule par la relation :

$$(a^2 + r^2)\, v = \frac{2}{3}\pi a^4 r.$$

Dans ce problème et les deux précédents, il est facile de calculer l'expression de la surface engendrée.

6. — Deux cercles de même rayon a donné, dont A et B sont les centres, se touchent extérieurement en O. Soient C et D les contacts d'une tangente extérieure commune : il en résulte le triangle mixte OCD. Or, si ce triangle fait une révolution autour du rayon AC, quelles sont les expressions de la surface et du volume engendrés ?

7. — Deux sommets opposés d'un carré sont les centres et son côté donné a le rayon de deux quadrans, hypoténuses de deux triangles rectangles mixtes. Or, si le système fait une révolution

autour d'un côté du carré, quelles sont les expressions de la surface et du volume engendrés par chacun des deux triangles et par le double segment circulaire résultant ?

8. — Soient A et B les centres, a et $\frac{1}{3}a$ les rayons donnés de deux cercles se touchant extérieurement au point O. Si C et D sont les contacts d'une tangente commune et que le triangle mixte OCD fasse une révolution autour de AC, autour de CD, ou enfin autour de AB, quelles sont chaque fois les expressions de la surface et du volume engendrés ?

9. — Soit m le rapport du volume de l'anneau rond à $2\pi^2, x$ le rayon du cercle générateur et y la distance de son centre à l'axe de rotation. Si a étant une droite donnée, x doit être moyen proportionnel entre a et $a-y$, démontrer que le *maximum* de m donne l'anneau engendré par la révolution de la lunule circulaire autour de la corde commune à ses deux côtés, cette corde a étant le côté du carré inscrit dans le cercle dont le rayon est la valeur trouvée pour x. — Calculer la surface de cet anneau.

10. — La base b et la hauteur h d'un triangle t étant données, soit x la parallèle à b comprise entre les deux côtés latéraux du triangle ou entre leurs prolongements : b et x sont les bases d'un trapèze T de hauteur y inconnue. Or, si le système fait une révolution autour de b et qu'on désigne par m le rapport de *vol.* T à *vol.* t, on propose de calculer les nombres inconnus x, y et m.

On n'a pour cela que les deux équations simultanées :

$$hx = b(h-y) \text{ et } (b+2x)y^2 = bh^2m.$$

Eliminent x, on trouve l'équation finale préparée

$$y^3 - \frac{5}{2}hy^2 + \frac{1}{2}h^3m = 0.$$

Cette équation ayant deux inconnues y et m, le problème est indéterminé. Prenant donc à volonté $y = \frac{1}{2}h$, par exemple, il en résulte $m = \frac{1}{2}$. Substituant cette valeur de m et observant que $\frac{1}{2}h$ étant racine de l'équation finale résultante du 3^{me} degré en y, son premier membre est divisible par $y - \frac{1}{2}h$. De sorte que le quotient du second degré en y étant égalé à zéro, il en résulte les deux autres racines. Ainsi pour $m = \frac{1}{2}$, on a trois systèmes de valeurs réelles de x et de y ; d'où l'interprétation de ces valeurs donne trois *vol.* T équivalents entre eux et à $\frac{1}{2}$ *vol.* t.

Si l'on veut que le terme en m soit un cube parfait, on posera $y =$ la racine cubique de ce terme : il en résultera $\frac{1}{2}m = \frac{27}{64}$, $y = \frac{3}{4}h$ et trois systèmes de valeurs réelles de x et de y. Cela donne encore trois *vol.* T équivalents entre eux.

Enfin, si l'on applique la *méthode des dérivés pour calculer le maximum ou le minimum de la fonction d'une seule variable,* méthode que nous avons développée en Algèbre, 5^{me} édition, on verra que le *maximum* de m est l'unité et répond à trois systèmes de valeurs réelles de x et de y. Comme deux de ces systèmes sont identiques et que chacun fait coïncider T avec le triangle t proposé, il en résulte un seul trapèze T décrivant le volume *maximum* équivalent à *vol. t.*

11. — Le rayon r de la sphère et le volume πm du segment sphérique sont inconnus, aussi bien que sa hauteur x et le rayon y de sa base ; tandis que la calotte est équivalente à la surface sphérique dont le rayon a est donné. Or, la méthode des dérivées démontre que le *maximum* de m et les valeurs correspondantes de x, r, y sont :

$$m = \frac{2}{3}(a\sqrt{2})^3 \text{ et } x = r = y = a\sqrt{2}.$$

On voit que : *De tous les segments sphériques de rayons différents, mais terminés par des calottes équivalentes, le plus grand est une demi-sphère.* — La réciproque est vraie.

12. — La base b et la hauteur h d'un cône droit circulaire étant données, il existe plusieurs systèmes de trois cylindres droits *inscrits* équivalents entre eux ; mais il n'existe qu'un seul système de deux cylindres inscrits de même volume *maximum.* — Théorème analogue pour toute pyramide et le prisme inscrit.

13. — Un cylindre circulaire droit étant donné, il existe plusieurs systèmes de deux cônes droits *circonscrits* équivalents entre eux ; mais il n'existe qu'un seul cône circonscrit de volume *minimum.* Théorème analogue pour tout prisme et la pyramide circonscrite.

14. — Un cône circulaire droit C étant donné, toute section circulaire faite dans ce cône ou dans son opposé au sommet est la base d'un autre cône dont le sommet est au centre de la base de C ; et ce second cône est dit *inscrit* dans le premier C. Cela posé, il existe plusieurs systèmes de trois cônes inscrits équivalents entre eux ; mais il n'existe que deux cônes inscrits de même volume *maximum* $\frac{4}{27}$C.

15. — Le bassin d'un jet d'eau doit être un prisme droit, ayant pour base un hexagone régulier, et dont la capacité soit de 12 mètres cubes. Par mètre carré de surface intérieure on paiera 8 francs pour daller le fond et 12 francs pour le mur latéral. Quelles doivent être en mètres les longueurs x et y du côté de la base et de la profondeur pour que le prix total m de la construction du bassin soit le moindre possible? — Par les dérivées le prix *minimum* est $m = 144\sqrt{3} = 249$ fr. 41, et répond à $x = 2^m, y = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1^m,155$.

Réciproquement, les prix particuliers et le prix total ci-dessus étant donnés, on trouve 12 mètres cubes pour le *maximum* de la capacité du bassin à construire.

16. — Le bassin d'un jet d'eau sera un cylindre circulaire droit ayant 5π mètres cubes de capacité. Pour mètre carré de surface intérieure on paiera a francs pour daller le fond, $2a$ pour le mur latéral et en outre $\frac{1}{2}a$ par mètre de longueur pour tailler les pierres qui en garniront le contour supérieur. Quelles doivent être en mètres les longueurs x et y du rayon du fond et de la profondeur pour que le prix total de construction soit le moindre possible? — Réponse : $x = 2^m$ et $y = 1^m, 25$; d'où le prix total *minimum* est $16\pi a$.

17. — La base b et la hauteur h d'un triangle T étant données, soit x la base et y la hauteur d'un rectangle R inscrit. Si le système fait une révolution autour de b et que m soit le rapport inconnu de *vol.* R à *vol.* T : 1° il existe plusieurs systèmes de trois *vol.* R équivalents entre eux, et même dans l'un de ces systèmes l'un des volumes répond au *maximum* de R ; 2° il existe deux *vol*, R répondant au *maximum* de m, savoir $\frac{4}{9}$. — Dans chacun de ces cas, quelle est la surface totale de chaque *vol.* R engendré?

18. — Soit a la distance donnée du point P à chacun des côtés de l'angle droit A. Par le point P menant la droite rencontrant en B et C les côtés de l'angle, il en résulte le triangle ABC = T de base AC = x et de hauteur AB = y, toutes les deux inconnues. Or, soit πm le volume inconnu que T engendre par une révolution autour de AC : 1° il existe trois *vol.* T équivalents entre eux et pour l'un desquels T est un *minimum* ; 2° il existe deux *vol.* T de même valeur *minimum*, produit de la sphère de rayon a par $\frac{16}{27}$.

19. — La diagonale a d'un rectangle R est donnée, mais ses

deux côtés x et y sont inconnus. Par les sommets de R on mène à ses diagonales des perpendiculaires extérieures, se coupant deux à deux aux sommets d'un losange L circonscrit. Si πm désigne le volume inconnu engendré par la révolution du losange L autour de l'axe perpendiculaire à l'extrémité de l'une de ses diagonales : 1° il n'y a qu'un seul système de valeurs de x et de y donnant le *minimum* de *vol.* L. ; 2° il existe deux volumes équivalents entre eux, répondant l'un au *minimum* de L et l'autre au *maximum* de R. — Il existe des propriétés analogues pour la surface engendrée par la révolution du contour du losange.

20. — Deux carrés extérieurs sont construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse a est donnée, l'un des angles aigus étant de 30 *degrés.* Si le système fait une révolution autour de a, calculer le volume et la surface engendrés.

21. — Sur les côtés AB $=$ AC $= 2a$ d'un quart de cercle donné on décrit deux demi-circonférences intérieures : il en résulte le double segment circulaire 2S et le triangle isocèle curviligne T. Or, si le système fait une révolution autour de AB, calculer les volumes et les surfaces engendrés par T et 2S.

Si la demi-circonférence sur AC est extérieure, on a un second triangle curviligne isocèle : quelles sont les expressions en a du volume et de la surface engendrés par la révolution de ce triangle autour de AB ?

22. — Connaissant les longueurs a,b,c des arêtes du sommet et le volume T d'un tétraèdre, calculer le volume m T du tétraèdre dont le plan de la base rencontre les trois arêtes données, prolongées s'il est nécessaire, de telle sorte que les longueurs inconnues x,y,z des nouvelles arêtes sur a,b,c satisfassent aux équations

$$ax = by = c\ (c = z).$$

Comme d'ailleurs on a l'équation $xyz = abcm$, on trouve qu'il existe trois tétraèdres équivalents entre eux, lorsque le terme en m est un cube parfait, et seulement deux de même volume *maximum,* répondant à celui de m.

23. — Soit $2a$ la longueur donnée de chaque côté du carré ABCD. Du centre A et avec le rayon $2a$ on décrit le quadran BID. Sur les diamètres AB et AD on décrit deux demi-circonférences, la première intérieure et la seconde extérieure : il en résulte le

triangle curviligne isocèle dont le quadran BID est la base. Calculer la surface et le volume engendrés par la révolution de ce triangle autour de BC.

24. — On donne numériquement le côté $2a$ du carré ABCD. Sur les diamètres AB et CD on décrit deux demi-cercles intérieurs, se touchant au centre O du carré, et sur le diamètre AD on décrit le demi-cercle extérieur AID : il en résulte une figure composée de ce demi-cercle et des deux triangles curvilignes OAD, OBC égaux et opposés. Or, si cette figure fait une révolution autour de BC, le volume engendré est équivalent à sept fois celui de la sphère de rayon a.

25. — Les côtés donnés $2a$ d'un triangle équilatéral sont les diamètres de trois demi-circonférences intérieures, limitant une figure curviligne extérieure. Or, si cette figure fait une révolution autour de la tangente à deux de ses six côtés égaux, quelle est l'expression du volume engendré?

26. — Soit $2a$ le côté numérique donné d'un carré. Des sommets de celui-ci comme centres et avec la demi-diagonale pour rayon décrivant quatre quadrans, il en résulte deux genres de croix mixtes concentriques, l'un ayant pour sommets ceux du carré proposé et l'autre terminée aux côtés de ce carré. Or, le système faisant une révolution autour d'un côté $2a$, calculer le volume et la surface engendrés par l'aire et le périmètre de chaque croix.

27. — Parmi tous les parallélipipèdes rectangles dont a est la longueur donnée de chaque diagonale et dont l'une des dimensions moyenne proportionnelle entre les deux autres, celui de plus grand volume, de plus grande surface et de plus grande somme d'arêtes est le cube construit sur le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ayant $\frac{1}{3}a$ pour rayon. — (Méthode symétrique chaque fois).

28. — Calculer les côtés du triangle rectangle générateur du cône circulaire droit équivalent au demi-volume de la sphère de rayon r donné, sachant que $\pi r^2(2+\sqrt{6})$ exprime la surface de ce cône.

29. — Soit πm le volume inconnu du cylindre droit circulaire dont la surface équivaut à celle de la sphère de rayon a donné. Il existe plusieurs systèmes de trois cylindres cherchés équivalents entre eux, mais seulement deux cylindres de même volume *maximum*.

30 — Soit m le volume d'un parallélipipède rectangle, à base carrée, inscrit dans le cône droit circulaire dont la hauteur h et le rayon r de la base sont donnés. Il existe trois de ces parallélipipèdes inscrits équivalents entre eux et seulement deux autres de même volume *maximum*. — (Même théorème pour le prisme droit inscrit dont la base est un hexagone régulier).

31. — Dans la sphère de rayon r donné, il existe plusieurs systèmes de deux prismes droits inscrits équivalents entre eux et dont les bases sont des hexagones réguliers. Mais un seul de ces prismes est de volume *maximum*.

32. — Dans la sphère de rayon r donné, il existe plusieurs systèmes de deux cônes circulaires droits inscrits équivalents entre eux. Mais un seul cône inscrit est de volume *maximum*. — (Théorèmes analogues pour les cylindres droits circulaires inscrits et pour les pyramides droites inscrites à bases carrées).

33. — Lorsque la surface sphérique de rayon r donné équivaut à la surface totale plus la surface latérale du cône droit circulaire inscrit, la hauteur h de ce cône et le plus grand segment du diamètre $2r$ divisé en moyenne et extrême raison.

34. Lorsque trois cercles égaux, a étant la longueur donnée de chaque rayon, se touchent extérieurement deux à deux, les points de contact sont les sommets d'un triangle curviligne T limité par trois arcs égaux. Or, si le système fait une révolution autour de l'axe tangent à deux de ces cercles, calculer la surface et le volume engendrés par le contour et l'aire de T.

De plus, quelles sont les expressions en a du volume et de la surface de chacun des anneaux ronds que décrivent les cercles inscrits et circonscrits au triangle T proposé? — On sait d'ailleurs calculer le volume et la surface engendrés par le triangle isocèle mixte que les deux cercles font avec l'axe tangent.

35. — Dans le cercle de rayon r donné on connaît le côté c du triangle équilatéral inscrit, ainsi que l'aire L de la lunule différence entre le demi-cercle extérieur dont c est le diamètre et le segment dont c est la corde. Or, si L fait une révolution autour d'un second côté c, quelles sont les expressions en r de la surface et du volume engendrés?

De plus, si le grand segment fait une révolution autour de sa corde c, quelles sont les expressions en r de la surface et du volume que décrit la figure composée des deux petits segments déterminés par les deux autres cordes c ?

36. — Soit $2a$ la longueur donnée de chacun des côtés égaux du triangle rectangle isocèle, dont $2b$ est la longueur de l'hypoténuse. Sur les deux côtés $2a$ comme diamètres on décrit deux demi-circonférences intérieures, se coupant en deux quadrans chacun au milieu de $2b$. Il en résulte une figure composée de quatre segments égaux et dont deux sont réunis par la corde b commune. Si la figure fait une révolution autour de $2b$ ou autour d'un diamètre $2a$, quelles sont chaque fois les expressions en a de la surface et du volume engendrés ? — (Double problème analogue pour le triangle équilatéral de côté donné $2a$).

37. — Les parties inconnues $2b$ et $2c$ du diamètre donné $2a$ d'un demi-cercle sont les diamètres de deux demi-cercles intérieurs. Soit x le rayon du cercle tangent aux trois demi-circonférences et d la distance de son centre au diamètre $2a$. Si ce cercle tangent fait une révolution autour de $2a$, je dis que le *maximum* de l'anneau rond engendré a pour mesure $\frac{4}{27}\pi^2 a^6$.

C'est ce qu'on démontre, à l'aide de la méthode symétrique, après avoir calculé les deux relations

$$(a^2 - bc)x = abc \text{ et } d = 2x.$$

Théorème analogue lorsque l'un des demi-cercles intérieurs se réduit à son diamètre $2b$.

On peut aussi calculer le *maximum* du volume engendré par la révolution autour de $2a$ du triangle curviligne ayant pour côtés les trois demi-circonférences. — Quel est le *minimum* de la surface décrite par le contour du triangle ?

38. — Dans le tétraèdre SABC on connaît en *degrés* les angles $ASB = 90$, $ASC = 60$ et $CSB = 45$. Soient a, b, c les longueurs inconnues des arêtes SA, SB, SC, dont l'une b est moyenne proportionnelle entre les deux autres. Sachant d'ailleurs que la droite donnée p est la somme des trois a, b, c, on propose de calculer le *maximum* du volume T du tétraèdre proposé.

Pour cela on a déjà deux équations ; et quant à la troisième, prenant le triangle ABS pour base du tétraèdre, puis menant la hauteur $CO = h$ et du pied O les perpendiculaires OD, OE à SB, SA, on trouve aisément $12\,T = abc$.

39. — Conservant les dénominations et les valeurs angulaires du précédent problème, calculer le volume T du tétraèdre, ainsi que les longueurs a, b, c, sachant que les nombres p,

m et q expriment la somme de ces trois longueurs, leur produit et la somme de leurs produits deux à deux.

D'après la composition des coefficients, les inconnues a, b, c sont les racines de la même équation finale

$$v^3 - pv^2 + qv - m = 0.$$

On sait résoudre cette équation dès qu'elle a une racine commensurable, diviseur du dernier terme $-m$; comme pour $p = 8$, $q = 19$ et $m = 14$.

Mais si $p = 10$ et $m = 24$; il faut prendre pour v l'un des diviseurs 2, 3, 4 de 24. Il en résulte la valeur de q et par suite les valeurs de a, b, c.

Enfin, si $p = 35$ et $q = 350$, on aura une solution en substituant à v la racine cubique de m. — (Chaque fois on a trois tétraèdres équivalents).

40. — Dans le tétraèdre SABC on connaît les valeurs en *degrés* savoir 60, 45 et 30 du dièdre SA, de l'angle ASB et de l'angle ASC. Calculer le *maximum* du volume T du tétraèdre et les longueurs a, b, c qui le fournissent, sachant que la somme des carrés de ces longueurs est égale au carré numérique de la droite donnée n.

Pour avoir la seconde équation de ce problème, on prend le triangle ASB pour base du tétraèdre, puis on mène la hauteur $CO = h$ et du pied O la perpendiculaire OE à SA. On trouve alors $48\,T = abc\sqrt{6}$.

41. — Conservant les dénominations et les valeurs angulaires du précédent problème, calculer le volume T et les longueurs a, b, c dont 9 et 99 sont leur somme et celle de leurs cubes.

Ici les coefficients q et m sont inconnus. Or, des éliminations convenables dans les deux équations données fournissent une relation entre q et m; tandis que $v = 3$ dans l'équation finale fournit une seconde relation : il en résulte une solution en nombres entiers, et par suite trois tétraèdres équivalents.

42. — Dans le tétraèdre SABC l'angle ASB et les deux dièdres SA, SB valent 60° chacun. Calculer le volume T du tétraèdre, ainsi que les longueurs a, b, c dont 56, 288 et 1568 sont les sommes respectives de leurs carrés, de leurs cubes et de leurs puissances quatrièmes.

On trouve $28T = abc\sqrt{7}$. Mais il faut des éliminations

particulières, en ayant égard aux trois équations données, pour exprimer m et q en fonctions de l'auxiliaire p, celle-ci étant la seule racine entière 12 de l'équation en p du troisième degré.

43. — Connaissant l'angle ASB = 90°, le dièdre SA = 60° et le dièdre SB = 45, calculer le volume T et les longueurs a, b, c, sachant que 21 et 273 sont les sommes respectives des carrés et des puissances quatrièmes de ces trois longueurs.

On trouve $66\,T = abc\sqrt{66}$ et trois tétraèdres équivalents par $v = 1$, $p = 7$, etc.

44. — Avec les données angulaires du précédent problème, calculer le volume T et les longueurs a, b, c, sachant que 0, — 37 et 2738 sont les sommes respectives de ces longueurs, de leurs produits deux à deux et de leurs puissances quatrièmes.

Éliminant c, la seconde des équations résultantes aura pour facteur la première

$$a^2 + ab + b^2 - 37 = 0.$$

N'ayant donc que cette seule équation à deux inconnues a et b, le problème est indéterminé. Mais en posant $b = 3$, on trouve $a = 4$ et $c = -7$. On aurait pu poser $b = 4$ ou -7. Interprétant la valeur négative, il en résulte trois tétraèdres équivalents.

45. — Si le dièdre SA et les angles ASB, ASC valent chacun 30°, calculer le volume T et les longueurs a, b, c dont — 1, 29 et 29 sont les sommes respectives de ces longueurs, de leurs carrés et de leurs cubes.

On trouve $48\,T = abc$ et trois tétraèdres équivalents. — Quel est le *maximum* de T lorsque la somme des cubes des longueurs a, b, c est triple du cube dont n est le côté donné ?

46. — Dans un parallélipipède rectangle, calculer le volume m et les trois dimensions x, y, z dont 9, 99 et 333 sont les sommes respectives de ces trois dimensions, de leurs cubes et de leurs puissances quatrièmes.

Ici les inconnues auxiliaires sont m et la somme q des produits deux à deux de x, y, z : il en résulte trois parallélipipèdes équivalents.

47. — Dans un parallélipipède rectangle, calculer le volume m et les trois dimensions x, y, z dont -19, -90 et 722 sont les sommes respectives de leurs produits deux à deux, de leurs cubes et de leurs puissances quatrièmes.

Les inconnues auxiliaires étant m et la somme p des trois dimensions, on trouve trois parallélipipèdes équivalents.

48. — Soit p la somme des trois dimensions numériques x, y, z d'un parallélipipède rectangle; soit 9 sa demi-surface et m son volume. Etant donné l'un quelconque des trois nombres p, q, m on peut toujours calculer le *maximum* ou le *minimum* de chacun des deux autres, d'après la méthode soit symétrique soit du second degré. Il en résulte six problèmes différents dans chacun desquels le parallélipipède devient un cube pour le maximum et le minimum.

49. — Soient A et C les centres, a et c les rayons donnés de deux cercles se touchant extérieurement; soient B et D les contacts d'une tangente extérieure commune; soient enfin M et N les points où les prolongements de AC rencontrent les deux circonférences. Si la figure mixte MNDB fait une révolution autour de MN, la surface S et le volume v engendrés sont déterminés par

$$S = 4\pi (a^2 + c^2) \text{ et } 3 (a^3 - c^3) v = 4\pi (a^5 - c^5).$$

50. — Construire le parallélipipède rectangle dans lequel $-a^2 - b^2$, $3a^2 + 2b^2$ et $a^3 + 6ab^2$ sont les sommes respectives des produits deux à deux des trois dimensions, de leurs carrés et de leurs cubes, a et b étant deux droites données. — (Six parallélipipèdes équivalents).

51. — Soit a le rayon donné de trois cercles égaux se touchant extérieurement deux à deux; soient A, B, C les points où ces trois cercles sont touchés par une circonférence extérieure, et soit L l'aire de la lunule différence des deux segments dont AB est la corde commune. Si le système fait une révolution autour de AB, quelles sont les expressions de la surface et du volume engendrés ?

On peut aussi calculer la surface et le volume que décrivent le périmètre et l'aire du triangle ABC.

52. — Soient A et C les centres, a et c les rayons donnés de deux cercles se touchant extérieurement; soient B et D les

deux points où la demi-circonférence dont AC est le diamètre coupe les deux proposées ; soient enfin M et N les points où les prolongements de AC vont couper les deux premières circonférenees. Si la figure mixte MNDB nit une révolution autour de MN, calculer la surface et le volume engendrés. — (Réductions analogues à celles du problème 49).

53. — Des centres A, B, C, D, sommets d'un carré tracé et avec son côté donné $2a$ pour rayon, on décrit quatre circonférences se coupant deux à deux, d'abord sur les médianes du carré, aux sommets d'un carré curviligne, puis aux sommets du carré proposé et enfin sur les prolongements de ses médianes en M, N, P, Q : il en résulte deux octogones curvilignes réguliers concentriques, divisés chacun en deux parties égales par la droite MP. Si donc chaque première moitié fait une révolution autour de MP, calculer chaque fois la surface et le volume engendrés.

54. — Calculer les rapports m et n du volume et de la surface d'une sphère, de rayon r inconnu, au volume et à la surface latérele, soit du cylindre inscrit, soit du cône inscrit, ayant chacun une hauteur h donnée.

ERRATA.

p. 77, lig. 18, . . . *au lieu de* proportions, *lisez* propositions
p. 87, lig. 5 en rem. . . . . $a = b$, ... $a : b$
p. 93, lig. 18 en rem. . . . . c', ... c
p. 116, lig. 12, . . ; . . . . . trièdres, . . . dièdres
p. 131, lig. 8 en rem. . . . . $A' = \pi r^2$, . . . $A' + A =$

Liége, novembre 1859.

Fig. 1.

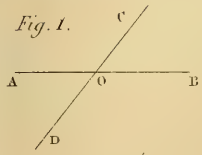


Fig. 2.

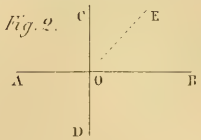


Fig. 3.

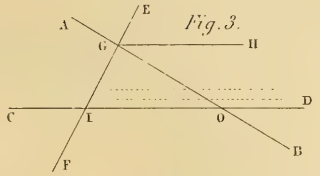


Fig. 4.

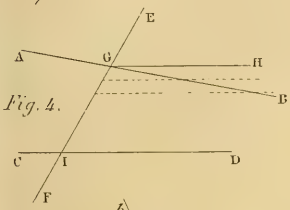


Fig. 5.

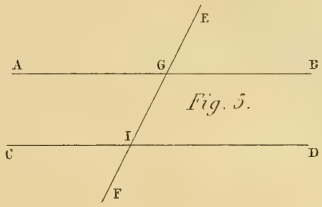


Fig. 6.

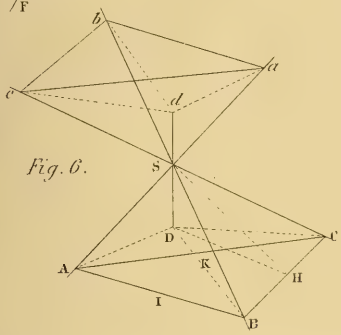


Fig. 7.

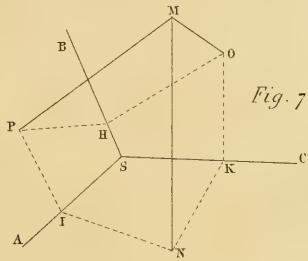


Fig. 8.

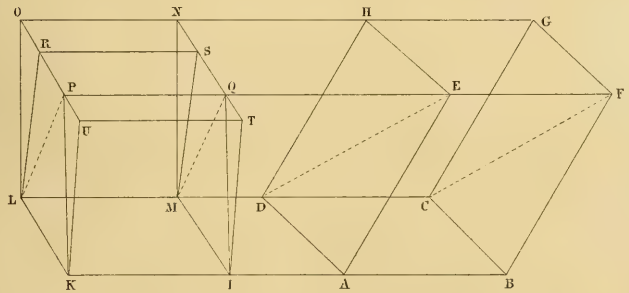


Fig. 9.

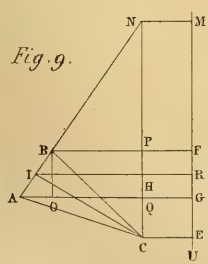


Fig. 10.

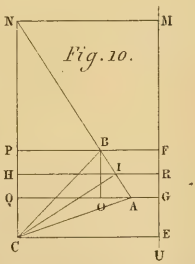
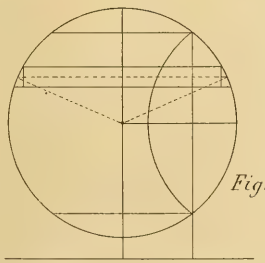


Fig. 11.



Lith : de H. Dessain.

IV. — *Examen des diverses méthodes employées pour l'établissement et le développement des calculs transcendants.*

PAR

A.-J.-N. PAQUE.

INTRODUCTION.

Depuis la découverte du calcul différentiel, des efforts nombreux partant de points de vue très-différents, ont été faits pour établir ce calcul d'une manière rigoureuse, susceptible d'application simple, immédiate et aussi facile que par la méthode infinitésimale.

Ces efforts étaient provoqués par la grande répugnance que les mathématiciens ont, de tout temps, éprouvé à admettre l'*infiniment petit* comme fondement de ce calcul.

Depuis longtemps déjà la méthode infinitésimale était rejetée pour l'étude des mathématiques élémentaires ; mais en mathématiques transcendantes, vis-à-vis de l'*imperfection*, de la *stérilité* ou de l'*impuissance radicale* pratique des conceptions de Newton et de Lagrange, l'analyse infinitésimale conservait une grande supériorité dans les applications.

En 1842, une nouvelle conception apparut, et son auteur, M. Lamarle, professeur à l'Université de Gand, après en avoir alors publié les principes fondamentaux, compléta cette œuvre en 1854 en l'établissant aussi analytiquement, de manière à passer immédiatement et sans solution de continuité, du concret à

l'abstrait, à saisir la continuité au point de vue algébrique, comme il l'avait au préalable établie au point de vue géométrique. D'une rigueur absolue dans tous ses principes, cette dernière conception offre *toujours* dans les applications, une promptitude et une facilité *au moins* égales à celles du calcul infinitésimal.

Il m'a paru utile, j'oserais presque dire *indispensable*, de revenir avec détails sur les conceptions déjà connues, d'en faire ressortir les vices, et par suite d'une comparaison approfondie avec la théorie de M. Lamarle, d'apprécier avec justesse toute la supériorité philosophique et pratique des procédés nouveaux.

Ce travail est partagé en deux parties : la première examine les méthodes de recherche des géomètres anciens jusqu'à Barrow inclusivement, et la seconde, celles des mathématiciens modernes depuis Leibnitz.

La seconde partie contient l'exposé succinct de la conception de M. Lamarle.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉPOQUE ANCIENNE.

CHAPITRE I.

MÉTHODE D'EXHAUSTION.

1. Les anciens, dans leurs recherches difficiles employaient la méthode d'*Exhaustion*, due, à ce qu'il paraît, à Archimède ; ils ne purent jamais se résoudre à considérer les courbes comme des polygones d'un nombre illimité de côtés, ni les surfaces courbes comme des polyèdres d'un nombre illimité de faces.

2. *Esprit de la méthode d'Archimède.* On regarde, par cette méthode, une courbe comme une limite dont s'approchent indéfiniment des périmètres polygonaux respectivement inscrits et circonscrits à cette courbe ; de cette manière on est amené à considérer la différence existant entre la courbe et le périmètre brisé, comme convergeant *continûment* vers *zéro*, comme s'ÉPUISANT ; de là le mot exhaustion.

La continuité indiquant alors la loi nouvelle pour le cas de la limite curviligne, les anciens appliquaient à cette loi, *ainsi dénoncée*, (devinée, révélée si l'on peut s'exprimer de la sorte), la démonstration *ad absurdum*, ou *à l'absurde*.

On sait que cette VÉRIFICATION consiste à faire voir que toute hypothèse contraire à l'existence d'une vérité, conduit à une impossibilité, ou à une contradiction.

Les anciens traitent d'une manière analogue les surfaces et les volumes.

Telle était la méthode d'invention ancienne, *méthode d'exhaustion suivie de la réduction à l'absurde* : elle procède donc par *induction* et démontre ensuite l'exactitude de la loi par l'*absurde*.

3. Les anciens, on le voit par ces quelques mots, ne regardaient pas la méthode d'exhaustion comme *infaillible*, et ne voyaient en elle qu'un moyen de révélation de l'existence des propriétés.

D'ailleurs ils n'avaient aucune méthode rationnelle et générale pour la détermination des limites.

4. On a dit souvent que les anciens avaient regardé les lignes courbes comme des polygones d'une infinité de côtés ; cette idée, qui ne paraît jamais dans leurs écrits, serait du reste en flagrante opposition avec l'esprit de la méthode d'exhaustion.

Les anciens n'admettaient, au contraire, que les démonstrations d'une rigueur absolue ; ils s'attachaient par-dessus tout à conserver à la science son entière évidence et exactitude et prenaient toujours à tâche d'éviter de telles suppositions comme *inadmissibles* en géométrie.

On a souvent fait à la méthode d'exhaustion le reproche d'être embarrassée, et difficile à concevoir. Il est vrai qu'elle nécessite souvent des préliminaires assez longs, indispensables pour la recherche des limites ; mais ces préliminaires sont toujours des propriétés importantes, souvent remarquables par leur originalité. Du reste, ces longueurs, ou espèces de *prolégomènes*, sont assez naturels, puisque la méthode d'Archimède n'est qu'une méthode particulière révélative. Un excellent géomètre (Peyrard), qui a fait la traduction des œuvres complètes d'Archimède, s'exprime ainsi dans la préface de cette traduction :

Archimède n'est véritablement difficile que pour ceux à qui les méthodes des anciens ne sont pas familières ; il est clair et facile pour ceux qui les ont étudiées.

Par des exemples traités à la manière d'Archimède, faisons comprendre l'esprit de la méthode d'Exhaustion.

5. Théorème. *Les surfaces des cercles sont entr'elles comme les carrés de leurs rayons.*

Inscrivons dans les deux circonférences des polygones semblables ; leurs surfaces auront pour rapport le carré de celui des rayons ; subdivisant, suivant la même loi, les arcs qui soustendent les côtés de ces polygones, on construira par là deux nouveaux polygones semblables dont les surfaces ont encore pour rapport le carré de celui des rayons.

Or, à l'aide de ces inscriptions consécutives, les périmètres ainsi obtenus s'approchent indéfiniment et d'aussi près que l'on veut de leurs circonférences respectives ; il est donc à prévoir que le

rapport des carrés des rayons qui s'est maintenu pour chaque inscription, se maintiendra encore alors que par la pensée on se transportera à la limite de ces inscriptions, *limite complètement en dehors de la série polygonale inscrite.*

Telle est la partie inductive de cette question ; en voici la vérification *ad absurdum*. Soient R et R′ les rayons de deux circonférences données : on suppose tour à tour, si cela est possible, qu'au lieu de

$$\frac{R^2}{R'^2} = \frac{\text{cercle R}}{\text{cercle R}'}$$

On ait :

$$\frac{R^2}{R'^2} = \frac{\text{cercle R}}{\text{cercle } r}$$

r étant en premier lieu moindre que R', en second lieu, plus grand que R′.

Soit d'abord $r < R'$.

Dans les circonférences R et R′ inscrivons des polygones semblables de surfaces respectives S_R et $S_{R'}$ dont les côtés du dernier ne rencontrent pas la circonférence r ; on aura :

$$\frac{S_R}{S_{R'}} = \frac{R^2}{R'^2}$$

et, par suite de l'hypothèse,

$$\frac{\text{Cercle R}}{\text{cercle } r} = \frac{S_R}{S_{R'}}$$

égalité impossible puisque

$$\frac{\text{cercle R}}{S_R} > 1 \text{ et } \frac{\text{cercle } r}{S_{R'}} < 1$$

En second lieu soit $r > R'$, et par suite, α étant une quantité positive :

$$\frac{R^2}{R'^2} = \frac{\text{cercle R}}{\text{cercle}(R'+\alpha)},$$

Les anciens disaient que ce dernier rapport de deux cercles est évidemment égal au rapport d'un cercle de rayon plus petit que R à celui d'un cercle de rayon R'. Au premier abord cette assertion paraît sans replique : cependant l'on pourrait remarquer que, s'il est toujours possible de déterminer numériquement la valeur de z par la condition

$$\frac{\text{cercle } (R' + \alpha)}{\text{cercle } R} = \frac{\text{cercle } R'}{z}$$

il n'est pas du tout évident que cette même valeur de z puisse être l'expression de la surface d'un cercle ; il faudra AVANT TOUT *prouver qu'il y a des circonférences et des cercles de toutes grandeurs.*

Telle est donc l'objection qui peut être faite à la méthode d'exhaustion dans cette application. Nous y reviendrons dans un instant.

Les anciens avaient donc en désignant par γ une quantité convenable.

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\text{cercle } (R' + \alpha)}{\text{cercle } R} = \frac{\text{cercle } R'}{\text{cercle } (R - \gamma)}$$

Or, il a été établi d'abord qu'il peut y avoir égalité entre le carré du rapport des rayons et celui des cercles correspondants au premier rayon et à un rayon moindre que le second.

Conclusion, r ne pouvant être ni $\gtrless R'$ est égal à R', d'où

$$\frac{\text{cercle } R}{\text{cercle } R'} = \frac{R^2}{R'^2}$$

6. *Comment on peut éviter l'objection relative à z.*

En parlant de z nous venons de dire qu'il n'est pas du tout évident qu'il existe des cercles de toutes grandeurs. Si l'on veut éviter cette objection, on pourra modifier comme suit le raisonnement :

Si l'égalité

$$\frac{\text{cercle } R}{\text{cercle } R'} = \frac{R^2}{R'^2}$$

est fausse, cela ne peut provenir que de ce que R' est trop grand

ou trop petit. — *L'ad absurdum* porte donc maintenant sur le rayon, et non plus sur le cercle.

1° Soit $r < R'$, et supposons que l'on puisse avoir

$$\frac{\text{cercle R}}{\text{cercle R}'} = \frac{R^2}{r^2}$$

Circonscrivons aux circonférences de rayons R et r des polygones semblables, dont S_R et S_r sont les surfaces et supposons que le périmètre de S_r ne rencontre pas la circonférence R' ; on aura :

$$\frac{S_R}{S_r} = \frac{R^2}{r^2}$$

D'où

$$\frac{\text{cercle R}}{\text{cercle R}'} = \frac{S_R}{S_r},$$

et

$$\frac{\text{cercle R}}{S_R} = \frac{\text{cercle R}'}{S_r}$$

Égalité impossible puisque

$$\frac{\text{cercle R}}{S_R} < 1, \text{ et } \frac{\text{cercle R}'}{S_r} > 1$$

2° Soit $r_1 > R'$, d'où

$$\frac{\text{cercle R}}{\text{cercle R}'} = \frac{R}{r_1^2}$$

Inscrivons aux circonférences R et r_1 des polygones semblables, dont les surfaces soient représentées par S_R et S_{r_1}, et tels que les côtés de S_{r_1} ne rencontrent pas la circonférence R' on aura :

$$\frac{S_R}{S_{r_1}} = \frac{R^2}{r_1^2}$$

d'où par combinaison :

$$\frac{\text{cercle R}}{S_R} = \frac{\text{cercle R}'}{S_{r_1}}$$

Relation impossible puisque

$$\frac{\text{cercle R}}{S_R} > 1, \text{ et } \frac{\text{cercle R}'}{S_{r_1}} < 1$$

7. On pourrait ainsi dire en empruntant la méthode ancienne: puisque l'on a,

$$\frac{\text{cercle R}}{\text{cercle R}'} = \frac{R^2}{(R'+r)^2}, \text{ ou } \frac{\text{cercle R}'}{\text{cercle R}} = \frac{(R'+r)^2}{R^2}$$

Et que la valeur d'une fraction n'est pas altérée, si de ses termes on soustrait des quantités ayant le même rapport,

On aura

$$\frac{\text{cercle R}'}{\text{cercle R}} = \frac{R'^2}{R-\theta}$$

On se trouve ainsi ramené au premier cas, où le rapport de deux cercles serait égal au carré du rapport qui existe entre le rayon du premier et un rayon moindre que celui du second.

8. *Défaut de la méthode d'Archimède.*

Comme on le voit par ce seul exemple, cette méthode laisse à désirer, puisqu'elle obligerait à donner les démonstrations de vérité aussi difficiles à établir que celles proposées.

J'ai indiqué comment on pourrait cependant éluder cette difficulté.

9. Donnons une application de la méthode d'exhaustion à des considérations d'ordre plus relevé, et choisissons la quadrature de la parabole.

On sait que cette solution appartient à Archimède, qui traita cette question d'une manière très-remarquable, et *digne de ne pas tomber dans l'oubli*, tant par l'élégance que par la grande généralité du procédé.

Archimède considère l'*aire du segment parabolique comprise entre l'arc de ce segment et sa corde.*

Soit APBFC (fig. 1) un arc parabolique et AC sa corde; soit menée par le milieu D de AC, la parallèle BD à l'axe de la parabole; subdivisons en un nombre *pair* chacune des moitiés de la corde segmentaire AC; sachant que 1° tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe; 2° toute droite parallèle à l'axe peut être considérée comme diamètre de la parabole; 3° les cordes

qu'un diamètre divise en deux parties égales sont parallèles à la tangente menée à l'extrémité du diamètre, il est clair que les tangentes en B, H, F, P, M, N, V seront respectivement parallèles aux cordes AC, AB, BC, AH, BH, BF, CF.

Archimède considère le triangle ABC, dont la base AC est la corde segmentaire et dont le sommet B (point de contact de la tangente parallèle à cette corde)est appelé le *sommet* du segment parabolique. Il a d'abord prouvé que ce segment est les $\frac{4}{3}$ du triangle ABC,et cette question se trouve ainsi traitée d'une manière tellement générale que l'on peut ensuite passer immédiatement à un segment parabolique quelconque.

Par C menons Ca parallèle à BD , et soit

$$Ca = \frac{4}{5}\,BD$$

Tirons Aa qui coupe BD en b et PR en d, et démontrons ce :

10. Lemme. *Le segment polygonal parabolique inscrit* APHMBNFVCDA *est équivalent au trapèze* CRda.

Pour cela démontrons que

1° $$ABC = CD\,ab.$$

On a

$$\frac{ACa}{ABC} = \frac{Ca}{BD} = \frac{4}{5}$$

D'ailleurs

D'où $$ACa = 4Ab\mathrm{D}.$$

$$Ab\mathrm{D} = \frac{ABC}{5}$$

On a aussi

$$CDba = ACa - Ab\mathrm{D} = \frac{4}{5}\,ACB - \frac{ABC}{5}$$

D'où enfin

$$CDba = ABC.$$

2° $$AHB + BFC = DG\ cb.$$

En effet puisque L et F′ sont respectivement les milieux de AB et BC,

$$\frac{AHB + BFC}{ABC} = \frac{2BHL + 2BFF'}{ABC}$$

Abaissant des points A et H des perpendiculaires $A\beta$ et $H\alpha$ sur BD, cette relation deviendra

$$\frac{AHB + BFC}{ABC} = \frac{HL \cdot H\alpha + FF' \cdot H\alpha}{BD \cdot A\beta}$$

ou

$$\frac{AHB + BFC}{ABC} = \frac{H\alpha}{A\beta} \cdot \frac{HL + FF'}{BD}$$

Les droites HQF et AC sont parallèles, donc HG = EF ; d'ailleurs LG = EF′, et par suite

$$HL = FF'$$

Et puisque le point G est le milieu de AD :

$$\frac{AHB + BFC}{ABC} = \frac{HL}{BD}$$

On sait que dans la parabole les carrés des ordonnées sont entr'eux comme les abscisses ; donc ici si l'on conçoit les arcs passant par B et dirigés suivant BD et la tangente en B, on aura

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{HQ}^2} = \frac{BD}{BQ},\ \text{d'où}\ BD = 4BQ$$

Ainsi

$$BQ = \frac{BD}{4},\ \text{d'où}\ DQ = \frac{3}{4}\,BD$$

or

$$HL = HG - LG.$$

Les triangles semblables ALG et ABD montrent que

$$LG = \frac{BD}{2} ;$$

donc :

$$HL = DQ - \frac{BD}{2}$$

Remplaçant DQ par $\frac{5}{4}$ BD, il vient :

$$HL = \frac{BD}{4.}$$

Donc

$$BQ = HL$$

Et par suite la dernière proportion devient :

$$\frac{AHB + BFC}{ABC} = \frac{BQ}{BD}$$

Donc

$$\frac{AHB + BFC}{ABC} = \frac{1}{4}$$

Or, les trapèzes semblables GD*cb* et CD*ba* donnent

$$\frac{GDcb}{CDba} = \frac{1}{4}$$

Mais

$$CDba = ABC$$

Donc

$$\frac{GDcb}{ABC} = \frac{1}{4}$$

Et à cause du rapport commun il viendra :

$$AHB + BFC = GDcb$$

3° Appliquant le résultat

$$AHB + BFC = \frac{ABC}{4}$$

aux triangles APH et HMB par rapport à l'axe HG, et aux triangles BNF et FVC par rapport à l'axe EF, il viendra :

$$APH + HMB = \frac{ABH}{4}$$

$$BNF + FVC = \frac{FBC}{4}$$

D'où par addition

$$APH + HMB + BNF + FVC = \frac{AHB + BFC}{4}$$

Or, (2°)

$$AHB + BFC = DGcb$$

Donc

$$APH + HMB + BNF + FVC = \frac{DGcb}{4}$$

Mais les trapèzes DG*cb* et RG*dc* sont semblables et donnent

$$DGcb = 4RGcd$$

D'où en multipliant ces deux dernières égalités :

$$APH + HMB + BNF + FVC = GRcd. \qquad \text{(c. q. f. d.)}$$

Conclusion : *Dans la bissection consécutive de la base, la somme des triangles intérieurs au segment parabolique, mais extérieurs au polygone précédent, est équivalente au trapèze le plus voisin du dernier point de division de la base.*

Ou en d'autres termes

Le polygone inscrit dans le segment parabolique est toujours équivalent au trapèze ayant pour bases, 1° *la droite* C*a égale aux* $\frac{4}{3}$ *de la longueur du diamètre compris entre le sommet parabolique et cette base ;* 2° *la parallèle à cette première base menée par le dernier point de division.*

11. Théorème. *Un segment parabolique quelconque est équivalent aux* $\frac{4}{3}$ *du triangle ayant pour base la corde du segment et pour sommet le point de contact de la tangente parallèle à la corde..=*

Par suite d'une bissection continue de la base segmentaire, le segment polygonal qui s'approche indéfiniment, d'aussi près qu'on le veut, et sans jamais pouvoir l'atteindre, de son circonscrit le segment parabolique proposé, est toujours équivalent au trapèze ayant pour bases la droite C*a*, et la dernière parallèle de R ; d'ailleurs le point R par cette continuelle bissection s'approchant sans cesse de plus en plus de sa limite le point A, le trapèze CR*da* s'approche indéfiniment de sa limite (le triangle AC*a*).

Ici encore cesse la *méthode* proprement dite d'*exhaustion*, c'est-à-dire, la partie inductive de la recherche, et l'on est donc porté à dire :

Le segment parabolique est équivalent au triangle ACa.

12. En effet (*ad absurdum*) supposons que l'on puisse avoir, en représentant par S le segment parabolique :

$$AaC = S + \Delta$$

ou

$$CRda + ARd = \Delta + S.$$

En continuant suffisamment la subdivision paire de la base du segment, et quelle que soit la valeur de Δ, il arrivera un instant où la différence ARd du trapèze CR*da* au triangle AC*a* sera moindre que Δ.

On aurait donc alors

$$\Delta > ARd$$

Et comme

$$\Delta - ARd = CRda - S$$

Il faudrait que

$$S < CRda$$

Conséquence évidemment impossible, puisque le segment polygonal inscrit est équivalent au trapèze CR*da*

2° $$S = AaC + \gamma$$

Par la bissection la différence du segment polygonal inscrit au segment parabolique circonscrit peut être rendue moindre que γ ; donc on aura

$$S - \text{polygone} < \gamma$$

Remplaçant le segment parabolique par son expression, il viendra :

$$Aa\,C < \text{polygone}$$

Relation impossible puisque le segment polygonal inscrit est équivalent au trapèze CR*da* (partie du triangle C*a*A).

Conclusion : *Le segment parabolique est équivalent au triangle* AC*a*, *ou aux* $\frac{4}{3}$ *du* triangle sommet.

13. *Réflexions générales sur la méthode d'Archimède.*

La méthode d'exhaustion, employée par les anciens dans leurs recherches difficiles, leur permettait d'étendre aux quantités incommensurables les rapports existant ou découvert entre quantités commensurables.

En résumé cette méthode se caractérise par l'introduction de *quantités auxiliaires* dont celles que l'on étudie sont les limites : la loi de continuité qui préside aux changements de ces quantités auxiliaires variables, fait connaître par induction les relations existant entre ces limites.

La méthode d'exhaustion comme moyen de démonstration, repose sur une idée générale ; mais elle ne renferme aucun moyen général d'application, et exige préalablement dans chaque cas, la connaissance intime des quantités auxiliaires introduites.

Telle est la raison de l'impuissance de cette méthode.

CHAPITRE II.

Képler.

14. Vers la fin du XV^{e} siècle, la renaissance scientifique s'annonce ; les spéculations géométriques portent un cachet prononcé de généralité et d'abstraction dogmatique.

En 1615, Képler dans sa *Nova stéréométrica doliorum*, introduit l'*idée* et l'*usage* de l'infini. Il y considère *le cercle comme une infinité de triangles, dont le sommet est au centre, et dont les bases forment la circonférence*, il émet des vues analogues quant aux autres figures dont il traite.

Ce serait cependant une erreur de croire que Képler soit le premier qui ait parlé de l'infini en mathématiques : *Eutocius*, géomètre du cinquième siècle, introduisit l'infini et eut l'idée de considérer le cercle comme un polygone d'une infinité de côtés : cette idée reçue alors comme une *excentricité*, ne fut l'objet d'aucune application.

Il paraît incontestable que les idées des anciens s'étaient arrêtées sur la *tendance* que les quantités auxiliaires de leur méthode d'exhaustion ont à s'identifier avec les quantités qui y ont fait recourir, et ils n'osèrent prononcer une identification qu'ils ne voulurent jamais installer en principe, parce qu'ils la regardaient à juste raison, comme logiquement impossible.

Képler s'adonnait, comme on le sait, à l'astronomie, et c'est lui qui créa l'astronomie moderne : il ne cultivait donc que secondairement les mathématiques, et c'est là sans doute ce qui explique pourquoi Képler ne développa pas en corps de doctrine une idée fondamentale dont il sut, du reste, dans un fort grand nombre de cas, tirer un parti très-avantageux.

15. Képler fit le premier la remarque suivante :

Dans le voisinage d'un point MAXIMUM *ou* MINIMUM, *la variation de l'ordonnée est nulle.*

C'est de cette notion si profonde que l'illustre *Fermat* sut déduire sa théorie des maxima et minima.

Képler traita avec grande simplicité les problèmes d'Archimède sur les *Conoïdes* et les *Sphéroïdes ;* ses solutions étaient tirées de cette question, alors de haute importance, qu'il se posa :

Chercher le volume engendré par la révolution d'une conique autour d'une droite située dans son plan.

Il résolvait ainsi généralement les questions dont Archimède n'avait traité que le cas particulier où l'axe de révolution est un axe de la conique; signalons cependant qu'Archimède n'a pas parlé du volume engendré par l'hyperbole tournant autour de son axe conjugué.

16. Les travaux mathématiques de Képler indiquent, cela est incontestable, une voie nouvelle, *fausse toutefois* ; mais la méthode qui les domine n'a aucun caractère de généralité en ce sens que chaque question exige des artifices ou des moyens différents de démonstration ; elle a donc ce défaut de commun avec la méthode d'exhaustion.

CHAPITRE III.

—

BONAVENTURE CAVALLERI.

—

INDIVISIBLES.

17. En 1635 à l'apparition de la *géométrie des indivisibles*, qui a eu beaucoup de retentissement, s'ouvre une nouvelle ère scientifique ; *Bonaventure Cavalleri*, inventeur de cette méthode, dont il était en possession depuis 1629 est né à *Milan* en 1598. Il fut l'élève de Galilée, et devint en 1629 professeur à l'Université de *Bologne* ; la mort le frappa dans ces fonctions, le 3 décembre 1647.

18. Donnons une idée de la méthode des indivisibles.

Cavalleri considère l'*étendue continue* comme composée d'un nombre INFINI de parties qu'il appelle SES DERNIERS ÉLÉMENTS ; ces éléments sont déterminés par des subdivisions en tranches parallèles, et dans les *derniers termes de cette division* ils sont appelés INDIVISIBLES.

Il considère les lignes comme composées d'une infinité de points ; les surfaces, d'une infinité de lignes ; les volumes, d'une infinité de surfaces, et l'idée d'infini ainsi introduite l'est à la fois au premier, au deuxième et au troisième ordre.

Cette nouvelle idée introduite ici si hardiment, doit être considérée comme le *germe* bien prononcé de l'analyse infinitésimale.

19. Dans toute question traitée à la Cavalleri, on distingue deux parties :

La première s'occupe d'établir le rapport des figures à l'aide du rapport constant qui existe entre leurs éléments.

La seconde se propose la détermination du rapport de l'infinité de lignes, ou de plans croissants ou décroissants, avec la somme d'un même nombre d'éléments de même espèce que les premiers, mais égaux entr'eux.

20. Cavalleri, dans la défense qu'il présenta de sa théorie en réponse à la critique *sérieuse* du géomètre Guldin, considérait sa méthode comme une simplification de la méthode d'exhaustion : ces surfaces et ces lignes élémentaires n'étaient autre chose pour

lui que les petits solides ou les parallélogrammes auxiliaires inscrits et circonscrits de la méthode ancienne ; *seulement la différence de la somme de ces auxiliaires à la figure totale était supposée nulle ;* il admettait ainsi l'identité des courbes et des périmètres polygonaux d'un immense nombre de côtés, et celle des surfaces courbes avec des polyèdres.

C'est en ce dernier point que se trouve le contact des méthodes de *Cavallerie* et de *Képler.*

La proposition fondamentale et générale de Cavalleri est celle-ci.

Toutes les figures dont les éléments croissent ou décroissent semblablement de la base au sommet, sont à la figure uniforme de même base et de même hauteur, en même raison.

21. Donnons par un exemple, une idée de la méthode des Indivisibles.

Problème. — *Trouver le volume du cône à base circulaire, en fonction de celui du cylindre de même base et de même hauteur.*

Considérons (fig. 2) le cône comme formé d'un nombre infini de cercles décroissant de la base au sommet, et le cylindre, d'une infinité de cercles égaux à cette base.

Le rapport du cône au cylindre est donc aussi celui de la somme des sections parallèles variables du cône à la somme des sections parallèles constantes du cylindre.

Comme ces sections sont circulaires, leurs sommes sont entr'elles comme les sommes des carrés des diamètres de ces sections ; reste donc à trouver le rapport des sommes des carrés des parallèles à AB, d'une part dans le triangle ABC, d'autre part dans le parallélogramme.

Concevons la hauteur du cône divisée en n parties égales (n pouvant croître indéfiniment).

La somme S′ des carrés des parallèles à AB dans le cylindre, sera évidemment :

$$S' = (n+1)\cdot \overline{AB}^2 = (n+1)n^2 \cdot \frac{\overline{AB}^2}{n^2}$$

Les parallèles à AB dans le cône, ont pour longueurs respectives en allant du sommet vers la base :

$$\frac{AB}{n}, 2\frac{AB}{n}, \ldots\ldots, (n-1)\frac{AB}{n}, n\frac{AB}{n}.$$

La somme de leurs carrés sera donc :

$$\frac{\overline{AB}^2}{n^2}\left[1+4+9+\ldots+\overline{n-2}^2+\overline{n-1}^2+n^2\right]$$

Déterminons la somme entre crochets, et pour cela considérons la suite des carrés des n premiers nombres, comme décomposée ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{rrrr

$$2\,N = (n+1)\sum_{0}^{n-1}(n-i)+\sum_{1}^{n-1} i\,(n-i)$$

ou

$$2\,N = (n+1)\sum_{0}^{n-1}(n-1)+\sum_{1}^{n-1} i-\sum_{1}^{n-1} i^2$$

ou

$$2\,N = (n+1)\left[n^2-\sum_{1}^{n-1} i\right]+n\sum_{1}^{n-1} i\sum_{1}^{n-1} i^2$$

ou

$$2\,N = n^2\,(n+1)-n\sum_{1}^{n-1} i-\sum_{1}^{n-1} i+n\sum_{1}^{n-1} i-\sum_{1}^{n-1} i^2$$

Faisant des réductions évidentes et sommant les $n-1$ premiers nombres entiers, il vient :

$$2\,N = n^2\,(n-1)-\frac{(n-1)\,n}{2}-(N-n^2)$$

D'où

$$N = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2.3}$$

Et par suite :

$$S = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2.3}\cdot\frac{\overline{AB}^2}{n^2}$$

D'où :

$$\frac{S}{S'} = \frac{2n+1}{2.3.n} = \frac{2n}{2.3.n}+\frac{1}{2.3.n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2.3.n}$$

Le rapport cherché $\frac{S}{S'}$ se compose de deux parties dont l'une est constante, et dont l'autre $\frac{1}{6n}$, variable, s'approche indéfiniment de zéro (*qui est sa limite*), à mesure que n croit. Or, ici, n étant illimité en grandeur, on devra considérer la limite constante vers laquelle converge le rapport $\frac{S}{S'}$, ce qui donne :

$$\text{Lim}\,\frac{S}{S'} = \frac{1}{3}$$

On a donc ce théorème :

Le cône est le tiers du cylindre de même base et de même hauteur.

22. On traiterait d'une manière analogue toutes les figures dont les sections conjuguées de même espèce sont dans le rapport des carrés de certaines lignes.

23. Cherchons, d'après Cavalleri, le volume de la sphère.

Soit (fig. 3), une demie circonférence XY tournant autour de son axe OR perpendiculaire à XY. Circonscrivons à XRY un rectangle ABXY, et proposons - nous de trouver le rapport des volumes de la demie sphère et du cylindre engendré par le carré OXRA tournant avec XR autour de l'axe OR.

Cavalleri considère ces deux corps comme composés de cercles parallèles à celui des rayons OX (et de plan normal à OR) ; ces cercles sont variables pour la sphère, constants pour le cylindre. Soit CDFGKPH l'un de ces plans sécants, et cercles DG, et CG les sections produites dans la sphère et le cylindre.

Ces sections sont entr'elles comme les carrés de leurs rayons DG et CG. Tirons AO et BO ; par suite du mouvement de rotation, AO décrit un cône droit dont le rayon de la base circulaire est AR ; le cercle de rayon FG est l'élément de ce cône.

On a

$$\frac{\text{cercle CG}}{\text{cercle DG}} = \frac{\overline{CG}^2}{\overline{DG}^2}, \quad \text{et} \quad \frac{\text{cercle FG}}{\text{cercle DG}} = \frac{\overline{FG}^2}{\overline{DG}^2}$$

D'où

$$\frac{\text{cercle CG} + \text{cercle FG}}{\text{cercle DG}} = \frac{\overline{CG}^2 + \overline{FG}^2}{\overline{DG}^2}$$

D'ailleurs FG = OG, donc :

$$\frac{\text{cercle CG} + \text{cercle FG}}{\text{cercle DG}} = \frac{\overline{DO}^2}{\overline{DG}^2}$$

Mais DO = CG, et

$$\frac{\text{cercle DG}}{\overline{DG}^2} = \frac{\text{cercle CG}}{\overline{CG}^2}$$

Donc

$$\frac{\text{cercle DG} + \text{cercle FG}}{\text{cercle CG}} = \frac{\overline{CG}^2}{\overline{DG}^2} \frac{\overline{DG}^2}{\overline{CG}^2} = 1$$

et

$$\text{cercle DG} + \text{cercle FG} = \text{cercle CG}$$

Cette relation existant pour une section élémentaire quelconque perpendiculaire à l'axe, il s'en suit que

$$\textit{Vol.}\ \text{Cylindre} = \textit{vol.}\ \frac{\text{Sphère}}{2} + \textit{vol.}\ \text{cône.}$$

Mais

$$\textit{Vol.}\ \text{cône} = \textit{vol.}\ \frac{\text{cylindre}}{3}$$

Donc

Le volume de la sphère est les deux tiers du volume du cylindre circonscrit.

24. Appréciation critique du conceps de Cavalleri.

La seule manière de définir géométriquement mais d'une manière rigoureuse le point, la ligne, la surface et le volume, est la suivante :

Le volume est la portion de l'espace occupée par un corps, dont l'enveloppe extérieure (ou ce qui le termine) est nommée surface.

Ce qui limite une portion de surface est appelé *ligne.*

La ligne enfin est terminée par le *point, élément géométrique* idéal, *sans dimensions.* Et ce sont précisément ces abstractions successives et élémentaires de l'espace que l'on doit bien établir au début de la science.

On ne peut donc pas dire en mathématiques que la ligne est un composé de points ; car ce qui n'a pas d'étendue ne peut, par collection, former un tout qui en ait ; pour le même motif, il est irrationnel de supposer que la surface est composée de lignes, que le volume est composé de surfaces.

On voit donc que les hypothèses fondamentales de Cavalleri sont tout simplement *absurdes,* et que par suite son calcul ne peut-être

regardé que comme un moyen abréviatif, *essentiellement faux* dans sa nature intime, et nécessitant toujours le contrôle des méthodes rigoureuses.

Il n'est donc pas surprenant que, ni Cavalleri ni ses illustres disciples Pascal et Roberval, n'aient pu installer d'une manière irréprochable les bases de leur doctrine.

Cavalleri dans son dernier ouvrage

Exercitationes mathématicæ,

fait du reste l'aveu *très-explicite* de son impuissance à démontrer les principes fondamentaux de sa théorie ; il déclare même, *qu'il faudra toujours recourir à la méthode d'exhaustion, et à la démonstration à l'absurde pour la justification complète et logique de ses résultats.*

Képler et surtout après lui Cavalleri ont cru pouvoir, pour donner plus d'étendue à la méthode d'exhaustion, abandonner les fondements de cette ancienne méthode et pour être plus hardis, asseoir leurs théories sur des *hypothèses* : ils ont ainsi cru qu'il pouvait être permis de concevoir l'inscription et la circonscription polygonale dans les figures courbes comme n'étant plus du domaine fini et déterminable ; de là sont venus les *indivisibles*, de là par une nouvelle extension nous verrons plus tard sortir les infiniments petits, et l'on est arrivé en imaginant ces indivisibles en nombre *indéfini*, à s'appuyer sur ce principe *faux* et *dangereux* en application, que leur somme constituait la figure proposée.

La méthode des anciens se trouvant toujours contrôler les résultats de la théorie nouvelle des indivisibles, cette dernière conception fut en grande faveur ; toutefois elle fut sérieusement combattue, surtout par le *père Guldin*, autour d'un théorème célèbre sur les centres de gravité, et dont voici l'énoncé :

Toute figure engendrée par la révolution d'une ligne ou d'une surface autour d'un axe de rotation est le produit de la quantité génératrice par le chemin décrit par le centre de gravité. =

Abstraction faite de l'impossibilité d'asseoir rationnellement la théorie de Cavalleri, on doit cependant reconnaître que le principe métaphysique de la théorie des Indivisibles a une grande généralité, qui disparait toutefois dans les applications.

—

CHAPITRE IV.

PERSONIER ROBERVAL, né en 1602, à Roberval près de Beauvais, mort en 1675.

26. Anciennement on regardait la tangente à une courbe en un point donné comme une droite telle qu'entr'elle et la courbe, on ne peut mener aucune autre droite.

Cette définition qui, dans bien des cas, offrait très-peu de ressources fut abandonnée par *Roberval* qui médita sur les idées et la théorie mécanique nouvelle des courbes émises par Gallilée, dans son ouvrage intitulé :

Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes.

Roberval y pose l'axiôme suivant (page 24).

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante pour chaque position de ce point.

Ce principe est assez *intelligible* dit Roberval, pour être facilement accordé après avoir été considéré attentivement.

Cet auteur ajoute (page 25).

Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données), examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé et vous aurez la touchante à la ligne courbe.

La méthode de Roberval consiste donc à concevoir le mouvement du point qui décrit la courbe comme sans cesse décomposable en deux autres, dont les directions et les vitesses soient toujours assignables ; la tangente est alors dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit avec des dimensions proportionnelles à ces vitesses.

27. Pour permettre d'apprécier la fécondité de ce nouveau principe, cherchons par son aide les touchantes à la *parabole*, à l'*hyperbole* à l'*ellipse*, et au *limaçon de Pascal.*

En traitant les tangentes aux coniques, nous aurons l'occasion

de tirer de l'oubli une génération remarquable de ces courbes, que l'on n'a conservée que pour l'une d'elles.

La *génération de la parabole* à l'aide de la belle propriété si connue de l'égalité de distance de chacun de ses points au foyer et à la directrice venait d'être inventée en 1631 par le célèbre *Claude Mydorge*, qui, dans un nouveau traité des sections coniques, simplifia les démonstrations anciennes, et fit faire à cette théorie des progrès marqués.

Roberval s'empara de cette construction et en tira le parti suivant :

Puisqu'un point quelconque de la courbe est également distant du foyer et de la directrice, c'est que sur ce point, et suivant ces directions, agissent des forces égales dont la résultante est dirigée suivant la bissectrice de l'angle de ces droites, et ainsi se trouve déterminée dans cette bissectrice, la touchante à la parabole au point considéré.

28. Faisons actuellement voir que la touchante à la parabole selon Roberval est bien celle déterminée par l'ancienne définition.

Apollonius disait (fig. 4) :

Soit la parabole BAC, AX son axe, F son foyer, M le point par lequel il faut mener la tangente. Du point M menez MP perpendiculaire sur AX, et soit P le pied de cette perpendiculaire.

En sens contraire de AX portez AG = AP, la tangente sera MG : par M menons MY parallèle à AX, et démontrons que MG est la bissectrice de l'angle PMY.

On a, si D_1DD_1 est la directrice,

$$AD = AF$$

Mais par construction

$$AP = AG$$

D'où par addition

$$DP = FG$$

D'ailleurs par suite de la construction de la parabole on a

$$DP = MF$$

D'où

$$MF = FG$$

D'où

$$\widehat{EGM} = \widehat{FMG}, \text{ et enfin } \widehat{FMG} = \widehat{GMY} \qquad \text{(c. q. f. d.)}$$

29. *Touchante à l'*HYPERBOLE

Selon Claude *Mydorge* voici la description de l'hyperbole dont AA′ est l'axe et (F,F′) les foyers.

Soient (fig. 5) P et P′, choisies entre A et A′ de manière que

$$AP = A'P' = A'F' = AF$$

Soit K un point quelconque de XX′ ; de F′ avec F′K pour rayon décrivons un arc de cercle KMM′ , et de F avec PK décrivons un autre arc de cercle ; ces arcs détermineront par leurs intersections deux points M et M′ de la courbe.

En effet

$$MF' = F'K$$
$$MF = PK$$

D'où par soustraction

$$MF' - MF = F'K - PK = A'P + A'F' = AA'$$

ce qui est bien la loi de génération ordinaire.

Soit en M *à mener la tangente.*

Tirons MF et MF′ : ces lignes, dans la génération de l'hyperbole, tournent respectivement autour de leurs points F et F′ et ont toujours entr'elles une différence constante

$$PF' = AA'$$

D'où l'on voit que le point générateur qui se meut sur les droites MF et MF′ est, suivant ces droites, sollicité à s'éloigner des points F et F′ par des *forces égales,* puisque la différence des chemins parcourus est *constante.*

On obtiendra donc la touchante à la courbe, en divisant l'angle FMF′ de ces droites en deux parties égales.

30. Quant à l'*ellipse,* voici comment *Claude Mydorge* la décrit par points : soit (fig. 6), AA′ l'axe, F et F′ les foyers ; prenons sur l'axe

$$AQ = AF = A'F' = A'Q'$$

Soit P un point quelconque situé entre F et F′ ; avec un rayon

$$PF' \gtrless \begin{matrix} AF \\ AF' \end{matrix}$$

décrivons un arc de cercle, et du point F avec PQ pour rayon, décrivons un autre arc de cercle ; on détermine ainsi par intersections deux points de l'ellipse. En effet

$$MF' + MF = F'P + PQ = F'P + AP + AQ = AA'$$

Soit en M *à mener la tangente à l'ellipse.* Tirons MF et MF′ ; quand l'une de ces droites augmente, l'autre diminue d'une égale quantité, puisque la somme des chemins parcourus

$$MF + MF'$$

est constante ; il s'en suit qu'à chaque instant le point M se trouve soumis, suivant les droites qui le joignent aux foyers, à des forces qui l'éloignent de l'un des foyers pour le rapprocher d'autant de l'autre ; donc ces forces sont d'égale intensité, et la bissectrice de leur angle, représentant en direction la résultante de ces forces, sera la tangente en M à l'ellipse.

31. *Apollonius* construisait cette tangente de manière que

$$\widehat{F'MT} = \widehat{FMT'}$$

ce qui est la conséquence immédiate de notre construction.

32. Limaçon *de Pascal.*

Donnons d'abord la description de cette courbe.

Par un point S d'une circonférence OS (fig. 7), menons la ligne diamétrale SOX sur laquelle nous prenons un point quelconque P, tel cependant que

$$SP > SQ$$

Par S menons diverses sécantes sur lesquelles à partir de leurs seconds points de rencontre avec la circonférence, nous portons des longueurs égales à PQ ; le lieu géométrique des points ainsi obtenus est le *limaçon de Pascal.*

Soit en C à mener la tangente.

Le point T, conjugué de C, est animé d'un mouvement qui, par la rotation de ST autour de S, tend à le précipiter vers Q, puisque l'angle QPS est droit ; d'où l'on conclut que tout point de SP, et en particulier le point C du limaçon, est doué d'un mouvement dans la direction perpendiculaire à ST ; de plus l'espace parcouru par un point C de ST est évidemment en raison directe de sa distance CS au point S, centre de rotation ; si donc TV est supposé représenter l'espace parcouru par T en vertu du mouvement rotatif, CV′ parallèle à TV et limité à SV prolongé sera l'espace parcouru par C dans la direction perpendiculaire à CS.

Mais en même temps que ST tourne autour de S, les points C et T s'éloignent de S, c'est-à-dire obéissent à une force de translation dirigée suivant CS ; les espaces parcourus, en vertu de ce mouvement, sont égaux ; car pour une ligne quelconque CS, l'on a en vertu de la génération du limaçon :

$$CS - PS = ST - SQ$$

Pour une autre ligne C_1S, l'on aurait :

$$C_1S - PS = ST_1 - SQ$$

D'où

$$CS - C_1S = ST - ST_1$$

Égalité qui exprime évidemment que *l'espace parcouru par* C *est* ÉGAL *à l'espace parcouru par son conjugué* T *pour passer d'une position à une autre de la sécante.*

Cherchons donc l'espace parcouru par T en supposant que le mouvement rotatif de T soit TV : le mouvement effectif de T a lieu suivant la tangente en T à la circonférence, c'est-à-dire suivant TZ ; par V menons la parallèle VZ à CS ; VZ est la quantité de translation de T, et par suite aussi celle de C ; on portera donc cette distance VZ de V′ en α sur la parallèle à CS menée par V′.

La droite Cα sera la touchante cherchée.

33. *Insuffisance de la méthode de Roberval.* —

Cette méthode, si élégante et si ingénieuse, frappe l'esprit qui y trouve une *analogie métaphysique remarquable* avec la conception Newtonnienne des fluxions.

Roberval considérait la géométrie à un point de vue plus élevé

que celui sous lequel on l'envisageait avant lui : il faisait intervenir les mouvements qui avaient dû engendrer les grandeurs dont il s'occupait.

Comme méthode, la conception de Roberval était entièrement nouvelle ; il n'est toutefois peut-être pas inutile de faire connaître qu'*Archimède* et *Pappus* firent usage de la composition des mouvements, (déjà connue d'Aristote), dans leurs travaux sur les spirales.

Roberval, en déduisant ainsi un *mode général de génération curviligne*, devança de beaucoup Newton ; mais il ne sut pas, privé du secours si puissant de l'analyse, tirer de sa théorie tout le parti possible.

La détermination des mouvements élémentaires dont est doué le point générateur est souvent difficile, indépendamment de l'analyse comme auxiliaire ; mais il est incontestable que la méthode de Roberval restera un mouvement de l'émancipation logique et rationnelle de l'esprit mathématique.

—

CHAPITRE V.

FERMAT.

34. *Pierre Fermat*, conseiller au Parlement de Toulouse, est né en 1608 à *Baumont de Lomagne*, près de Toulouse ; il est mort en 1665.

La Grange, La Place et Fourrier regardent à juste titre, Fermat comme l'inventeur du calcul infinitésimal, dont les principes sont installés dans sa méthode,

De Maximis et Minimis

dans son *traité des tangentes* et dans *celui des quadratures*.

Voici du reste le principe fondamental de la méthode de Fermat pour chercher la plus grande et la plus petite valeur d'une quantité et pour résoudre le problème général des tangentes.

Si une quantité est fonction d'une variable dont une valeur particulière donne le maximum ou le minimum de la fonction, la variation de la fonction est nulle pour un accroissement INFINIMENT PETIT *attribué à cette valeur particulière.*

Il augmente donc l'inconnue d'une indéterminée μ, dépouille de radicaux et de fractions l'équation résultante, fait des réductions évidentes, dégage ce facteur μ commun, divise toute l'équation par μ, et résoud l'équation finale résultante par rapport à l'inconnue proposée.

Quant à la recherche des tangentes, Fermat, dans l'équation qui lie l'abscisse et l'ordonnée, équation qu'il appelle *la propriété spécifique de la courbe*, donne à l'abscisse une variation quelconque, et détermine la tangente par cette considération que l'ordonnée nouvelle de la courbe est égale à celle de la tangente (pour un accroissement infiniment petit) ; il a alors une équation qu'il traite à l'instar des questions de *maximis* et *minimis*, et au moyen de laquelle il obtient l'expression de la sous-tangente.

Soit donc en général, x et y les coordonnées du point de contact, et γ la sous-tangente. Soit de plus (ε étant infiniment petit), $x + \varepsilon$ l'abscisse d'un autre point de la tangente ; l'ordonnée du même point sera :

$$Y = y + \frac{\varepsilon}{\gamma} y$$

Cette ordonnée doit être égale à celle de la courbe pour la même abscisse $x + \varepsilon$; on remplacera donc dans l'équation

$$y = f(x)$$

x par $x + \varepsilon$, et y par $y + \frac{\varepsilon}{\gamma} y$; on simplifie l'équation résultante, on divise par ε puis l'on pose $\varepsilon = o$ dans la nouvelle équation obtenue. On aura ainsi la sous-tangente.

Appliquant cette méthode à la parabole, dont l'équation est

$$y^2 = 2px$$

on aura, après substitutions et réductions :

$$2\frac{y}{\gamma} + \frac{\mu^2}{\gamma^2}\varepsilon - 2p = o$$

Posant $\varepsilon = o$, il vient :

$$\frac{y^2}{\gamma} = p, \text{ d'où } \gamma = \frac{y^2}{2p} = 2x$$

Chacun saisit le rapprochement de cette méthode avec celle du calcul différentiel : en effet l'indéterminée infiniment petite ε est la différentielle dx, et $\frac{\varepsilon y}{y}$, ou l'augmentation correspondante de l'ordonnée est la différentielle dy.

35. Nous avons déjà dit que Képler a, le premier, fait la remarque fondamentale dont le génie de Fermat sut déduire ses *maximis* et *minimis*, et *ses tangentes*.

36. Le véritable esprit de la méthode des tangentes de Fermat est donc :

Lorsqu'une ordonnée de courbe est parvenue à son maximum, ou à son minimum, la tangente correspondante est parallèle à l'axe, et c'est pour cela qu'alors la différence de deux ordonnées consécutives est nulle.

37. On peut reprocher à la méthode de Fermat la difficulté souvent très-grande de faire disparaître les irrationnelles d'une équation; de plus, dans la recherche des tangentes, à ce défaut se joint l'incertitude dans laquelle on se trouve sur la forme de la courbe autour du point de contact, forme qui, lorsque la tangente est parallèle à l'axe, peut être telle que le point de contact soit un point singulier, d'inflexion ou de rebroussement.

Une étude de la courbe aux environs du point de contact, devient dès lors indispensable, pour déterminer comment croit ou décroit l'ordonnée de *chaque* côté du point de contact.

CHAPITRE VI.

BARROW.

38. Barrow, né en 1630, modifia en 1669 dans ses

Lectiones Geometricæ,

la méthode tangentielle de Fermat ; ainsi fut fait le dernier pas vers le calcul différentiel.

Soit à mener en M, la tangente à la circonférence (fig. 8).

Proposons-nous de déterminer la sous-tangente PT. A cet effet soit l'ordonnée CD, infiniment voisine de MP, et menons MF parallèle à AB ; vu sa petitesse le triangle MCF est semblable à PMT.

Posons

$$MF = \theta\ ,\ CF = a$$

θ et A sont *deux* quantités infiniment petites introduites, au lieu que Fermat n'en introduit qu'*une* seule.

Nous aurons donc

$$\frac{a}{\theta} = \frac{y}{PT}$$

L'équation de la circonférence donne

$$y^2 = 2rx - x^2$$

Au moyen de cette équation passons au point C, il viendra :

$$(y + a)^2 = 2r(x + \theta) - (x + \theta)^2$$

D'où

$$2ay + a^2 = 2r\theta - 2x\theta - \theta^2$$

Mais puisque a et θ sont infiniment petits, on aura :

$$a^2 = o\ ,\ \theta^2 = o$$

Donc

$$2ay = 2r\theta - 2x\theta$$

D'où

$$\frac{a}{\theta} = \frac{r - x}{y}$$

Donc enfin

$$\frac{r - x}{y} = \frac{y}{PT},\ \text{ou } PT = \frac{y^2}{r - x}$$

Et remarquons en passant que $\frac{r - x}{y}$ ou $\frac{a}{\theta}$ n'est rien d'autre que le $\frac{dy}{dx}$

Combien n'est-on pas près du calcul différentiel par la méthode de Barrow, qui pourrait peut-être n'être regardée que comme un perfectionnement de celle de Fermat.

Déterminer *immédiatement* et sans substitutions pour une fonction quelconque, le rapport

$$\frac{a}{\theta}$$

de Barrow, et lui appliquer un symbole convenable, telles sont les tendances des recherches et théories diverses sur lesquelles nous allons jeter un coup d'œil général et rapide.

SECONDE PARTIE.

ÉPOQUE MODERNE.

SECTION I.

Examen critique des concepts connus.

39. *Fermat* eut en même temps que *Descartes* l'idée d'appliquer l'algèbre à la géométrie, c'est-à-dire de transformer les considérations géométriques en considérations analytiques équivalentes ; il ne parvint toutefois pas à en faire sortir une doctrine régulièrement organisée : cet honneur était réservé à son heureux émule qui, considérant les idées géométriques sous le double point de vue de la *grandeur* et de la *position* des éléments, créa en 1637 le système si général et si vaste de la géométrie analytique.

Cette grande conception permettant la généralisation spontanée des spéculations géométriques, s'empara des aspirations toutes récentes de Fermat, des idées plus simples de Barrow, et bientôt apparurent presqu'en même temps, comme complément indispensable de la *conception* Cartésienne, les nouveaux calculs transcendants de *Leibnitz* et de *Newton.*

Leibnitz, né le 3 juillet 1646, publia en octobre 1684, dans les actes des savants de Leipsick, son premier essai sur le calcul différentiel, sous le titre :

Nova méthodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, que nec fractas, nec irrationales quantitatis moratur et singulare pro illis calculi genus.

Cet ouvrage fut suivi, peu après, d'un autre contenant les principes fondamentaux du calcul intégral, et ayant pour titre :

De Géometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum.

Isaac Newton, est né le 25 décembre 1642 à Woolstrop en Angleterre.

En 1686, Newton ublie ses

Principes mathématiques de la philosophie naturelle.

Dans cet ouvrage sont exposés les principes du calcul des fluxions.

Il est prouvé, par la nombreuse correspondance de Newton, que ce savant était depuis 1666 en possession de sa méthode des fluxions.

40. *Destination générale de l'analyse transcendante.*

Les méthodes anciennes principales, d'*Archimède* de *Képler*, de *Cavalleri*, de *Roberval*, de *Fermat*, de *Barrow*, sont le plus souvent impuissantes pour la mise en équation des questions soient concrètes, soient abstraites ; cette impuissance doit, en grande partie, être attribuée au très-petit nombre d'éléments analytiques dont elles font usage, dans l'étude du passage du concret à l'abstrait

L'introduction d'un nouvel élément analytique suppose, exige nécessairement la création d'une nouvelle branche ou calcul mathématique correspondant. Or, on ne peut s'empêcher de reconnaître qu'il serait fort difficile, sinon impossible, de considérer quelque nouvel élément, quelque nouvelle opération arithmétique, et qu'ainsi la recherche des équations d'une question est souvent un but que l'on ne peut atteindre qu'indirectement.

Il ne reste plus alors qu'à introduire dans le calcul des quantités auxiliaires, entre lesquelles on puisse avec facilité établir des équations secondaires, dont la loi analytique de déduction de leurs primitives est connue et établie rigoureusement : on peut ainsi, à l'aide de cette loi, remonter à ces équations primitives dont la détermination est l'objet des recherches de l'analyse transcendante qui a pour but général de :

Procéder avec le secours de certains auxiliaires à l'établissement des équations, et déduire de la liaison existant entre ces auxiliaires et les données primitives de la question, par des procédés analytiques ÉTABLIS EN TOUTE RIGUEUR, *les équations que l'on se proposait de rechercher entre ces quantités primitives.*

41. *Nécessité indispensable de l'étude des diverses conceptions.*

La nature plus ou moins diverse des liaisons fondamentales qui existent entre ces quantités auxiliaires auxquelles on a recours, et les éléments primitifs de la question, constitue le caractère distinctif des diverses conceptions transcendantes que l'on a vu surgir depuis 1666.

Les systèmes ainsi imaginés facilitent plus ou moins la mise en équation, reposent sur des principes ou sur des hypothèses plus ou moins contestables.

Cette diversité de conceptions dont aucune ne satisfait pleinement à la science, soit au point de vue logique, soit au point de vue des ressources qu'elle fournit aux applications, accuse, il faut le reconnaître, *un état provisoire de l'analyse supérieure, dont il paraît urgent de sortir.*

Une étude approfondie, et quelque peu détaillée de chaque concept peut seule mettre sur la voie du *système régulier, simple et complet* que l'on doit adopter pour l'installation de l'analyse transcendante.

Nous allons successivement,

Établir les principes fondamentaux de chacun d'eux, apprécier et discuter l'exactitude philosophique et logique de ces principes, et déterminer le degré de fécondité pratique de l'algorithme qui leur est propre.

42. *Principaux concepts.*

Les diverses conceptions qui jusqu'ici ont régi les calculs supérieurs sont des modifications plus ou moins immédiates des trois suivantes :

1° Calcul Infinitésimal.

2° Calcul fluxionnel, et la méthode des limites ou des premières et dernières raisons.

3° Calcul des dérivées.

CHAPITRE I.

ANALYSE INFINITÉSIMALE.

43. L'analyse infinitésimale appartient à deux grandes écoles, dont la première est celle de l'inventeur, de Leibnitz ; la seconde est celle des géomètres successeurs ou disciples de Leibnitz, et en tête desquels il faut citer les frères *Bernouilli* et le *Marquis de l'Hospital.*

44. Calcul de Leibnitz.

Ce mathématicien concevait son calcul de la manière suivante :

Il suppose que des grandeurs qui sont *excessivement petites*, INFINIMENT *petites* par rapport à d'autres, peuvent vis-à-vis de celles-ci, être négligées *sans* ERREUR SENSIBLE.

En installant au début ce principe purement hypothétique, Leibnitz ne faisait qu'une chose *très-ordinaire* et dont les calculs d'approximation fournissaient alors déjà tant d'exemples.

Pour donner toute l'extension possible à ce principe, Leibnitz considéra comme nulle toute quantité qui par rapport à une autre (du reste de valeur *appréciable* ou de petitesse quelconque), est excessivement petite.

Il admet donc ainsi des infiniments d'infiniments petits, ou des infiniments petits du second ordre, négligeables *devant* ceux du premier ; de même il y a des infiniments petits du 3e ordre,etc.

Faisons bien saisir ce principe fondamental :

Dans une courbe quelconque, si l'on considère trois ordonnées excessivement rapprochées, les différences de ces ordonnées avec chacune de ses voisines sont des infiniments petits du premier ordre ; et la différence de ces infiniments petits est un infiniment petit du second ordre, etc.

45. *Imperfection du calcul de Leibnitz.*

Leibnitz, en négligeant certaines quantités, ne prétendait nullement que *ces quantités avaient ou pouvaient avoir une existence réelle, certaine.*

Il dit au contraire dans son *Essai de Théodicée* (Discours préliminaire § 79):

L'infini et l'infiniment petit ne sont que des fictions ; tout nombre est fini et assignable et toute ligne l'est de même.

Il affirma et démontra encore en d'autres circonstances, et notamment à l'occasion de certaine dispute qu'il eut avec *Jean Bernouilli* (dispute dont nous dirons plus loin quelques mots), il affirma et démontra, dis-je, que :

Les infiniments petits n'avaient pas d'existence réelle. Alors s'élevèrent des objections sérieuses contre la nouvelle analyse, dont on contesta la rigueur des principes fondamentaux, et bientôt Leibnitz fut forcé de répondre à des accusations qui ne tendaient à rien moins qu'à faire de son calcul, sans fondement réel, un véritable calcul d'approximation.

Voici quelle fut sa réponse :

Les infiniments petits sont des incomparables négligeables devant les quantités finies, comme des grains de sable, par rapport à la mer.

Cette réponse, portant atteinte à la certitude du nouveau calcul, semble, il faut l'avouer, ôter toute valeur (au point de vue rationnel) à la plus belle conquête scientifique, et paraît donner gain de cause à l'accusation.

Aussi Leibnitz crut-il ne pouvoir mieux faire qu'en étonnant les géomètres par la puissance de son calcul appliqué aux questions réputées alors les plus difficiles : toujours ses résultats furent confirmés par les méthodes rigoureuses employées par ses adversaires.

Il est donc permis de conclure que de l'impossibilité où Leibnitz a été d'établir d'une manière rigoureuse les points fondamentaux de son analyse, et du caractère essentiellement approximatif que revêt son hypothèse principale, *le calcul infinitésimal*, tel que l'a présenté ce grand homme, *est une conception* HARDIE, *mais* INSUFFISANTE *au point de vue de la rigueur philosophique qui devrait avant tout en être le cachet.*

46. *Calcul des Bernouilli, l'Hospital, etc.*

ou

Calcul Infinitésimal des successeurs de Leibnitz.

Définition fondamentale.

Les adeptes du nouveau calcul de Leibnitz voulurent être plus hardis, plus novateurs que leur maître, et posèrent la définition suivante :

On appelle INFINIMENT PETIT *une quantité moindre que toute grandeur* ASSIGNABLE *quelque petite qu'on la suppose, et qui par conséquent est négligeable devant une grandeur finie.*

Un nombre est INFINI *ou* INFINIMENT GRAND *quand il surpasse le plus grand nombre imaginable.*

Selon Carnot :

Les quantités infiniment petites sont considérées comme continuellement décroissantes, et telles qu'on puisse les rendre aussi petites que l'on voudra sans que l'on soit obligé de faire varier celles dont on cherche la relation.

Selon *Cauchy* et *Poinsot.*

Une quantité variable est INFINIMENT PETITE *lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment sans s'arrêter à une valeur ap-*

préciable, de manière à converger vers la limite zéro; *et de plus lorsque considérée isolément, elle peut être conçue plus petite que toute quantité donnée.*

C'est à cette dernière définition que l'on pourrait, je crois rattacher celle de Leibnitz. Les *Bernouilli* et l'Hospital continuaient leur définition nouvelle en disant :

Une quantité est *infiniment petite relativement à une autre* quand le quotient de la première par la seconde est un infiniment petit ; la seconde est alors dite *infiniment grande ou infinie* relativement à la plus grande.

D'après ces mathématiciens, toute quantité, même infiniment petite peut être infiniment grande relativement à telle autre quantité; de même une quantité infiniment grande peut être infiniment petite relativement à une autre.

Ainsi donc les grandeurs infinitésimales se partagent en plusieurs ordres, et *deux qvantités sont de même ordre*, lorsque leur rapport est fini.

PRINCIPE FONDAMEMTAL.

Tout nombre infiniment petit d'un certain ordre est nul *et* doit se négliger *à l'égard de tous ceux des ordres inférieurs et des nombres finis.*

ou encore

Deux quantités d'un ordre quelconque sont rigoureusement égales *lorsque leur différence est infiniment petite d'un ordre supérieur.*

Il est à remarquer que ce principe n'était chez Leibnitz, qu'une véritable supposition, à titre d'approximation.

Une variable x étant donnée on représente *son accroissement infiniment petit,* ou sa *différentielle* par dx. Traitant cette différentielle comme une nouvelle variable primitive, on obtient la *différentielle seconde* ddx, ou

$$d.dx$$

représentée si simplement par Leibnitz, à l'aide de la notation

$$d^2x$$

On aurait de même les différentielles 3e, 4e, 5e, etc. ne dx

$$d^3x,\ d^4x,\ d^5x.\ .\ .\ .\ .\ .\ d^nx.$$

47. *Aptitude nécessaire du calcul infinitésimal quant à la recherche des équations.*

Dans le concept infinitésimal tout l'avantage résulte de ce que l'on peut :

Considérer comme nulles les quantités infiniment petites eu égard aux quantités finies, et en général les quantités infiniment petites d'un ordre eu égard à celle d'ordre inférieur.

On se rend aisément compte de la grande puissance d'un pareil principe, si l'on fait attention que lorsqu'une équation entre différentielles d'un certain ordre offrira trop de difficultés d'établissement, on pourra choisir tel autre ordre que l'on voudra, et dont la loi des relations soit *manifeste* et *plus simple*. Il faut, bien entendu, que les nouveaux éléments différentiels soient d'ordres supérieurs à ceux déjà étudiés sans résultat, pour qu'ayant avec ceux-ci des différences infiniment petites, d'ordres encore supérieurs, on puisse négliger ces différences.

48. *Généralité des équations différentielles.*

Les quantités infinitésimales, qui entrent dans la composition des équations, restant les mêmes pour toutes les questions d'un même genre, les équations différentielles revêtent un caractère remarquable de généralité, en ce qu'elles appartiennent à certaines propriétés communes aux variétés d'une même question ; et pour particulariser une variété donnée il suffira de joindre à la formule différentielle du genre, certaines conditions propres à cette variété.

Ainsi pour ne citer qu'un exemple très-simple, soit à *trouver une courbe telle que l'arc, compté à partir d'un point fixe, soit moyen proportionnel entre l'ordonnée et la double abscisse.*

On sera conduit, en représentant l'arc variable par s, et par (x,y) les coordonnées d'un point de la courbe, à l'équation :

$$s = \sqrt{2xy}$$

qui donne par différentiation

$$sds = xdy + ydx$$

$$\text{Mais}\quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},\ \text{donc :}$$

$$\sqrt{2xy}\sqrt{dx^2 + dy^2} = xdy + ydx$$

Telle est l'équation infinitésimale de la solution ; la disparition des différentielles est du ressort du calcul intégral.

Dans cette solution $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est la formule différentielle propre à toutes les questions traitant de la longueur d'arc de courbes, et l'équation

$$s = \sqrt{2xy}$$

est la condition qui particularise la courbe cherchée

49. *Imperfection* LOGIQUE *de l'analyse infinitésimale.*

Quelques géomètres saisis d'admiration par la puissance du calcul de Leibnitz, et avides de se lancer dans la voie nouvelle, *adoptèrent sans restriction* les principes hypothétiques sur lesquels était installée cette analyse. De ce nombre sont, avons-nous déjà dit, les frères Bernouilli et l'Hospital.

Ces savants, plus hardis que Leibnitz, admirent dans le calcul, ces prétendues quantités infiniment petites, dont ils essayèrent par des moyens divers de *démontrer* L'EXISTENCE. Tous ces efforts, joints à ceux tentés depuis, prouvent une seule chose, c'est que l'on ne peut établir *rigoureusement* les principes de l'analyse infinitésimale, vu l'impossibilité logique des éléments auxiliaires de ce calcul.

50. Voici en quelques mots la *raison a priori* de cette impossibilité :

La quantité EST *ou* N'EST PAS.

Et il est de toute évidence que dans le premier cas, le seul où son étude mathématique puisse et doive être faite, sa diminution est toujours *possible*, *concevable*, IMAGINABLE ; ou en d'autres termes, que la quantité dans ce décroissement illimité, reste toujours FINIE.

Si du reste on mettait en doute cette dernière conséquence, que la plus grande partie des géomètres regarde aujourd'hui comme axiome, et si l'on essayait de prétendre que la quantité peut cesser d'être *finie*, *convenable*, *imaginable*, sans disparaître, sans cesser d'exister, il deviendrait indispensable d'indiquer le point où dans la période décroissante, la quantité cesse d'être finie.

Posé ainsi, tel qu'il l'est et dans de pareils termes, *le principe philosophique infinitésimal est évidemment* FAUX ; l'on est donc en droit de repousser de l'ensemble mathématique des auxiliaires qui

n'ont et ne peuvent avoir d'existence, de *vraies quantités purement chimériques.*

Malgré toute la légitimité de cette exclusion, les partisans de la science de l'infini ont essayé depuis Leibnitz, et par des voies très-différentes de cacher le vice radical de cette conception : nous allons examiner les moyens employés à cet effet.

51. *L'infiniment petit ne peut exister.*

Observons d'abord que la définition de l'infiniment petit n'en établit pas à priori l'existence. Mais voyons :

N'est-il pas évident qu'une quantité supposée moindre que toute autre, quel que soit du reste le degré de petitesse de celle-ci, n'est plus une quantité ; et je nie que jamais on puisse se figurer une quantité qui, *sans être* NULLE, n'est supérieure à aucune autre.

Cette seule observation suffirait à la rigueur pour détruire l'échaffaudage des infinis : mais comme on a beaucoup *argué* en faveur de l'existence de ces prétendues quantités, il nous paraît indispensable de signaler les principaux points de vue auxquels on s'est placé.

52. On a essayé de définir d'abord une *longueur infinie*, en disant que *la droite infinie est la plus grande possible, lorsqu'elle surpasse la plus grande longueur imaginable.*

C'est un principe non contestable que la ligne droite peut toujours être prolongée et ses parties subdivisées à volonté, et notre intelligence se refusera toujours, d'une part à admettre que cette augmentation d'une grandeur finie ait un terme ou limite, d'autre part à concevoir une grandeur si petite que nous n'en puissions concevoir une autre plus petite ; l'existence d'une ligne infiniment petite est donc inacceptable, impossible.

53. On a aussi tenté de définir l'infiniment grand par la considération de l'espace.

Disons, avant tout, que de tout temps la philosophie a disserté sur la nature de l'espace, et cela sans avoir produit le triomphe d'une opinion quelconque.

Pour nous, nous considérons cette question au point de vue mathématique, laissant avec soin le côté métaphysique.

Admettons même l'infinité de l'espace, c'est-à-dire que eu égard à l'état général de grandeur, il soit impossible de concevoir combien il faudrait réunir de parties pour former l'espace.

Je me permettrai de dire que si je comprends, sous cette

restriction, l'expression *espace illimité*, mon intelligence se refuse absolument à admettre qu'une telle grandeur, non susceptible de génération par voie d'addition de ses parties (quelles que soient du reste celles-ci), puisse donner lieu à une évaluation quelconque dont les partisans de l'Ecole Infinitésimale déduisent si hardiment le *nombre infini*.

En disant et répétant que l'*Espace* illimité ne peut être conçu par *augmentation continue*, on est arrivé peu à peu à croire que l'on parlait ainsi d'une espèce d'ordre réel de grandeur, alors cependant que cet ordre est complètement inintelligible.

54. *Des définitions de Cauchy et Poinsot.*

Lorsque l'on emploie avec prudence les définitions de ces savants, l'établissement des principes fondamentaux du calcul différentiel est moins irrationnel ; mais la promptitude, principal avantage du calcul infinitésimal, disparaît en même temps.

Le traité d'analyse de M. Cauchy démontre la vérité de cette observation ; plus récemment M. Duhamel a cherché aussi à rendre l'analyse infinitésimale plus rigoureuse.

En lisant ces ouvrages, on s'apperçoit à chaque pas, par les soins que leurs auteurs mettent à faire usage *des précautions les plus minutieuses* de la théorie des limites, *combien ils étaient convaincus de l'insuffisance logique de la méthode des infinis*. Dès que la méthode infinitésimale cherche à devenir plus rigoureuse elle cesse d'être expéditive.

Prenons au hasard un exemple très-simple à l'appui de cette dernière remarque. Lorsque cette méthode demande la différentielle d'un arc de courbe, on ne peut, comme le dit très-bien M. Cauchy, se contenter de dire que l'accroissement différentiel de l'arc s étant sensiblement égal à sa corde, on a

$$de = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

car il est INDISPENSABLE *de démontrer que l'unité est la* LIMITE *du rapport d'un arc* infiniment petit à sa corde.

De telles entraves font perdre au calcul infinitésimal son extrême promptitude, et ne lui laissent sous ce rapport, aucun avantage sur les autres calculs.

Et ne serait-il pas permis de conclure que de la part de MM. Cauchy et Poinsot, une telle défiance est la condamnation *bien* EXPLICITE du principe infinitésimal.

55. *Les séries prouvent-elles l'existence des infinis ?*

On a prétendu, Jean Bernouilli le premier, que la série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}+\text{etc.}$$

a un dernier terme qui est infiniment petit.

S'il en est ainsi, la somme des termes de cette progression est une quantité constante, et l'on se demande alors ce qu'est ce dernier terme *qui, sans pouvoir diminuer, n'est pas nul.*

Leibnitz, lui-même, nia à Jean Bernouilli l'existence de ce dernier terme.

Il est aisé du reste d'établir que ce dernier terme n'existe pas. En effet la série proposée est équivalente à 1 ; on ne peut certes pas avoir la prétention de *sommer* le second membre (c'est-à-dire la série) qui exprime la loi de génération de l'un des membres de l'égalité :

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\text{etc.}$$

Le second membre s'approche indéfiniment du premier, qui est sa limite, sans qu'ainsi cette limite puisse jamais être atteinte.

Leibnitz avec raison rejetait l'existence d'un dernier terme dans cette série décroissante, et cependant introduisait les infiniments petits dans le calcul : singulier exemple d'un haut génie, condamnant lui-même les principes fondamentaux de son admirable découverte, et démontrant même l'impossibilité des éléments hypothétiques dont il se sert.

56. *Le principe de continuité* INFIRME *le point de vue infinitésimal.*

On entend par *loi de continuité celle qui s'observe dans la génération des lieux géométriques par* MOUVEMENT, *et d'après laquelle par exemple, les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle.*

Poisson, dans son traité de mécanique, s'exprime ainsi :

« On est conduit à l'idée des infiniments petits lorsqu'on con-
» sidère les variations successives d'une grandeur soumise à la loi
» de continuité. Ainsi le temps croit par degrés moindre qu'au-
» cun intervalle que l'on puisse assigner, quelque petit qu'il

» soit. Les espaces parcourus par les différents points d'un corps » croissent aussi par des infiniments petits, car chaque point ne » peut aller d'un point à un autre, sans passer par toutes les positions » intermédiaires ; et l'on ne saurait assigner aucune distance, » aussi petite que l'on voudra, entre deux positions consécutives. » Les infiniments petits ont donc une existence réelle et ne sont » pas uniquement un moyen d'investigation imaginée par les » géomètre »

Des idées si fausses existent encore, dans l'esprit de tant de personnes qui s'occupent de mathématiques, *sur la continuité*, qu'il faut bien que nous donnions à ce point quelque détail.

Au point de vue métaphysique ; voici la réponse péremptoire à ce passage de Poisson, si souvent cité et reproduit par les partisans de l'infini :

Puisqu'entre deux positions consécutives, on ne peut assigner aucune distance, quelque degré de petitesse que conçoive du reste l'esprit, il est évident que ces deux points se touchent, et que par suite leur distance est *nulle :* le mouvement a lieu sans qu'il soit possible de concevoir *aucun intervalle* de temps ni de lieu.

57. *Au point de vue de la génération mécanique*, considérons *explicitement* l'hypothèse si fausse de l'existence d'une distance infiniment petite entre deux positions successives d'un point décrivant une ligne courbe en vertu de *forces déterminées et définies.*

Personne ne contestera que le point décrit sa trajectoire sous l'action des mêmes forces et d'un mouvement continu, c'est-à-dire sans interruption ni changement dans sa loi, et que les circonstances de ce mouvement sont identiques à quelqu'instant qu'on le considère.

Suivant le principe, ci-dessus rappelé de Poisson, la trajectoire dégénère en un périmètre polygonal, suivant chacun des côtés duquel la direction se conserve ; mais à l'extrémité d'un de ces éléments rectilignes du mouvement, il faudrait qu'une force qui était restée sans action pendant le temps nécessaire au parcours de cet élément, agit sur le point à l'instant précis de son passage par un sommet de la trajectoire, et qu'immédiatement *après cette force vint à* cesser d'agir.

Ce n'est certes pas ainsi qu'il peut être permis, *au point de vue d'une* saine *logique*, de considérer l'*action incessante et* continue des forces qui produisent le mouvement ; par suite, *aucune consé-*

quence, tirée d'une pareille hypothèse, ne peut être RATIONNELLEMENT *maintenue.*

On voit aussi par ces réflexions, que le calcul différentiel *n'a pas pour vertu propre*, comme le dit M. Cournot (Tome 1, page 422 de son *Essai sur les principes fondamentaux de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*), DE SAISIR DIRECTEMENT LE FAIT DE LA CONTINUITÉ DANS LA VARIATION DES GRANDEURS.

58. *Au point de vue géométrique pur*, voici la démonstration de l'impossibilité de l'infiniment petit.

Soit (fig. 9), un triangle ABC, et,

$$m\ ,\ m'$$

deux points CONSÉCUTIFS de la base BC ; soient menées les diverses parallèles

$$PQ,\ P'Q',\ P''Q''.$$

à BC, ainsi que les droites A*m* et A*m'*.

Puisque, d'après Poisson, la distance de deux points consécutifs de BC *existe et est infiniment petite*, il est incontestable que cette distance ne comporte entre ses extrémités aucune position du point générateur et que par suite *mm'* est un *indivisible*.

On devrait donc avoir

$$m_1m_1' = m_2m_2 = m_3m_3' = mm'$$

ou

$$m_1m_1' = m_2m_2' = m_3m_3' = 0$$

Conséquences évidemment absurdes.

59. *Doctrine de Carnot sur la compensation nécessaire des erreurs infinitésimales.*

Carnot, géomètre célèbre du commencement de ce siècle, a essayé d'établir le calcul des infinis sur des principes prétendument plus solides.

Résumons la théorie de Carnot.

Il appelle *Équation imparfaite* toute équation dont l'exactitude rigoureuse n'est pas démontrée, mais dont on sait cependant que l'erreur, s'il en existe une, peut être supposée aussi petite que l'on veut, c'est-à-dire, telle que pour rendre cette *équation exacte*, il suffit de substituer aux quantités qui y entrent, ou seulement à quelques unes d'entr'elles, d'autres quantités qui en diffèrent infiniment peu : ces substitutions étant faites, *on* PEUT *négliger les quantités infiniment petites relativement aux quantités finies, et généralement les infiniments petits d'un ordre vis-à-vis des infiniments petits d'ordre inférieur ;* ces équations ne cessent pas pour cela d'être imparfaites, et PEUVENT enfin devenir exactes par compensation d'erreurs.

Carnot *admet* comme symptôme certain et invariable de cette compensation, l'élimination complète des diverses quantités infiniment petites : il est conduit à ce symptôme en remarquant que des erreurs infiniment petites pouvant seules, par le procédé suivi, s'introduire dans les équations, l'élimination de ces quantités infinitésimales rend exacte l'équation trouvée.

60. Voici ce que nous répondrons à cette *singulière* manière de voir.

Les divers procédés analytiques par lesquels on retourne des équations différentielles aux équations finies, conduisent à des équations que l'on peut démontrer exactes à l'aide d'autres conceptions ; il est par suite à présumer que la disparition des erreurs sans cesse produites, s'accomplit pendant le travail analytique ; mais on n'est nullement en droit pour cela de supposer que cette disparition se fait par COMPENSATION.

De ce que l'élimination rend l'équation obtenue indépendante de toutes les quantités auxiliaires introduites, on ne peut pas conclure en thèse générale, que si les quantités infiniment petites introduites par chaque opération soit de différentiation, soit d'intégration, n'avaient pas été négligées, le résultat de l'élimination des auxiliaires serait encore le même ; il faut en un mot pour que l'on puisse affirmer que le résultat est bien l'équation finie cherchée, que l'*élimination ait porté sur* TOUTES *ces quantités étrangères*, dont une hypothèse *toute gratuite* ne peut annuler sans danger un certain nombre.

A notre sens, nous osons même avouer, que la prétendue compensation d'erreurs de Carnot, donnerait l'erreur pour base au calcul différentiel, contrairement à la pensée de ce géomètre.

D'ailleurs si l'équation imparfaite de Carnot est

$$A + \alpha = B + \beta$$

α et β étant des infiniment petits, et qu'elle ait dû fournir l'équation

$$A = B$$

il faudrait savoir ce qu'elle deviendrait SI L'ON NE NÉGLIGEAIT RIEN, ce qui exigerait que l'on eut, au préalable, démontré que

$$A = B, \text{ ou que } \alpha = \beta$$

De tout ce qui précède, il nous est permis de conclure 1° que *si, avec Leibnitz, on attribue à l'infini certaine valeur, on ruine l'exactitude des calculs transcendants qui deviennent ainsi des calculs d'approximation.*

2° Que si, en dehors de toute conception mathématique, on crée avec ces infinis, un nouvel ordre de grandeurs, on tombe dans les conséquences les plus absurdes et dans des paradoxes continuels.

CHAPITRE II.

—

MÉTHODE DES PREMIÈRES ET DERNIÈRES RAISONS,

OU

MÉTHODE DES LIMITES.

61. Newton fait reposer sa théorie des premières et dernières raisons (ou des limites) sur les considérations suivantes:

Deux quantités variables quelconques qui peuvent se rapprocher continuellement l'une de l'autre, de manière que leur rapport diffère si peu que l'on veut de l'unité, sont dites avoir

l'égalité pour dernière raison.

Et la limite d'une quantité variant d'une manière continue est la valeur dont peuvent s'approcher indéfiniment et d'aussi près que l'on veut, les diverses valeurs particulières de cette variable.

Ces *dernières valeurs ou dernières raisons* sont aussi appelées *premières valeurs ou premières raisons* des quantités primitives qui y correspondent, suivant que les variables sont regardées comme s'approchant ou s'éloignant des quantités fixes qui en sont les limites.

Pour découvrir cette première ou dernière raison, Newton détermine d'abord le rapport d'accroissements quelconques; il réduit ce rapport aux termes les plus simples, de manière qu'une partie au moins de chaque terme du rapport puisse être indépendante des valeurs des accroissements; enfin supposant que ces accroissements diminuent jusqu'à disparaître; il découvre aisément la limite.

62. *Avantage de ce concept.* La facilité avec laquelle cette conception procède à l'établissement des équations, provient de ce que l'on n'opère pas directement sur les quantités auxiliaires introduites, mais bien sur les limites de leurs rapports, et qu'ainsi

deux accroissements conjugués pourront toujours, pour plus de facilité, être remplacés par d'autres ayant avec eux des rapports ou des raisons convergentes vers l'unité.

C'est cet emploi des limites des accroissements effectifs qui constitue l'avantage le plus précieux du calcul des limites.

63. *Défaut et insuffisance de la conception des limites.*

Si Δy et Δx sont les accroissements simultanés d'une fonction et de sa variable, le calcul des premières ou dernières raisons cherche la valeur du rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

dont les deux termes convergent à la fois vers zéro, et deviennent simultanément nuls à la limite.

Ce rapport des différences évanouissantes se réduit à $\frac{0}{0}$, et les accroissements étant anéantis, il reste à comparer des quantités nulles : on conçoit toujours très-bien ce qu'est le rapport de deux quantités finies, mais on peut se demander si l'on comprend également bien un rapport dont les deux termes sont nuls à la fois, et n'est-il pas incontestable que s'astreindre à annuler les différentielles, c'est se résoudre à ne rien considérer. — Une seule explication s'offre à l'esprit, c'est que tout rapport qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ PEUT avoir une valeur déterminée.

On a reproché à la théorie des limites de Newton, d'introduire d'abord des accroissements pour en déduire une relation qui est la partie constante de leur rapport, et pour détruire ensuite tout l'échafaudage, en supposant que ces accroissements disparaissent.

L'analyse transcendante, considérée au point de vue actuel, donne l'équation :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x}$$

Désignant par $f_1 x$ la partie évidemment constante de ce rapport, quelque soit Δx, et par $f_2 x$ la partie fonction de Δx, et facteur du même accroissement, il viendra :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f_1 x + \Delta x \, f_2 x$$

Cette équation est vraie quel que soit Δx, *mais il faut* au moins *que* Δx *existe,* quelque petit qu'il soit d'ailleurs supposé. Il est certain que $f_1 x$ est une limite dont s'approche indéfiniment $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ à mesure que Δx décrit, *limite qui ne peut jamais être atteinte,* puisque pour cela Δx devrait disparaître.

On voit donc qu'en suivant les errements de Newton, l'*on arrive à cette conséquence que les premières ou dernières raisons de ces accroissements n'existent pas.*

Or comme la disparition des accroissements, ou le passage à la limite, conduit à l'importante théorie des tangentes, nous pouvons conclure que *la théorie des limites est incapable d'expliquer rationnellement ce qu'est la tangente en un point d'une courbe.*

64. On regarde, comme on sait la tangente en un point donné d'une courbe, comme la limite vers laquelle tend une sécante qui tournerait autour du point donné, de façon que son second point d'intersection avec la courbe se rapproche indéfiniment du premier; la tangente est donc la ligne de démarcation entre les directions qui coupent la courbe d'un côté du point de contact, et celles qui coupent la courbe de l'autre.

Soient Δy et Δx les accroissements coordonnés pour un point de la courbe

$$y = f(x)$$

la sécante qui passe par les points

$$(x, y) \text{ et } (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

fait avec l'axe des X, un angle dont la tangente est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Passant à la limite, ou au cas de $\Delta x = 0$ et $\Delta y = 0$, on aura pour coefficient angulaire de la tangente,

$$t = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Mais pour le cas de la tangente les accroissements sont nuls, ou plutôt n'existent plus.

Que signifie donc le rapport entre deux quantités qui n'existent pas ? Et l'insuffisance de la conception des limites n'est-elle pas manifeste, rien que par ce seul exemple !

Remarquons en passant qu'en faisant $\Delta y = o$ et $\Delta x = o$, il est *impropre* de se servir du mot limite pour désigner ce que devient l'expression générale du rapport de ces accroissements, qui pouvant avoir lieu en sens contraire seraient ainsi *négatifs*.

65. Ici se présente naturellement la question :

Dans la méthode des limites qu'est-ce qu'une différentielle.

Nous avons posé plus haut :

$$\Delta y = \Delta x \cdot f_1 x + \overline{\Delta x}^2 f_2 (x + \Delta x)$$

Le second membre se compose de deux parties, dont la seconde décroit indéfiniment par rapport à la première, à mesure que Δx s'approche de zéro.

Appelons donc différentielle la partie isolée.

$$fx \cdot \Delta x$$

La notation de Leibnitz pourra même être appliquée à cette quantité, et satisfaire au point de vue de la rigueur.

66. Mais au point de vue des applications, la méthode des limites est surtout insuffisante en ce qu'elle ne peut expliquer certains faits dont la connaissance est cependant indispensable ; nous venons de voir entr'autres que la notion de la continuation du mouvement du point générateur d'une courbe suivant la tangente (notion fondamendale cependant), ne peut être acquise par le concept des premières ou dernières raisons.

Eu égard à la rapidité de la mise en équation, la méthode des limites n'a pas les mêmes avantages que la méthode infinitésimale. La cause de cette infériorité est l'impossibilité où se trouve cette théorie de séparer, comme se le permet le calcul des infinis, les quantités infiniment petites l'une de l'autre ; la liaison de ces quantités entrave singulièrement l'élimination de ces auxiliaires.

—

CHAPITRE III.

THÉORIE DES FLUXIONS.

67. Newton exposa aussi son analyse sous une forme beaucoup plus philosophique, et toute différente du système des premières et des dernières raisons.

Cette conception encore adoptée aujourd'hui, en Angleterre, pour l'exposition de l'analyse transcendante, doit être examinée ici avec soin au point de vue de sa correspondance philosophique avec la méthode de M. *Lamarle*.

Newton partant de l'idée générale de *vitesse*, considère :

Une courbe comme produite par un point donné d'un mouvement qui varie d'après une loi quelconque et donnée ; de même il conçoit les surfaces engendrées par le mouvement des lignes, les solides par le mouvement des surfaces, et les angles par la rotation de leurs côtés.

Les diverses quantités ayant avec la courbe une liaison intime, l'abscisse, l'ordonné, l'arc, la soustangente, la normale, le rayon de courbure, et en général *les diverses grandeurs inhérentes à celle produite par le mouvement* sont considérées comme engendrées *continument*, par degrés successifs, pendant le mouvement.

Les grandeurs ainsi engendrées prennent le nom de *variable* ou de *fluente*, et l'on appelle *fluxion* la vitesse avec laquelle chacune d'elles est décrite.

La fluxion en un instant donné du mouvement est donc toujours mesurée par la quantité dont s'accroîtrait la fluente, dans un temps donné, si la vitesse de génération conservait la valeur acquise à l'instant considéré, c'est-à-dire si le mouvement imprimé était supposé permanent à partir du point donné.

On doit donc, dans le nouveau système de Newton, procéder d'abord à la mise en équation entre les fluxions des quantités de la question, pour remonter par un *calcul* convenable aux équations cherchées entre les fluentes elles-mêmes.

68. La conception fluxionnelle n'introduit dans le calcul que des

quantités finies, qui sont les vitesses du point générateur aux différentes époques de son mouvement.

On peut regarder à leur tour les *fluxions des coordonnées* comme les COORDONNÉES d'une nouvelle courbe, dont les *coordonnées* FLUENTES ont aussi leurs fluxions qui sont du second ordre par rapport aux premières.

De même il y a des fluxions du 3e et 4e ordre, et ainsi de suite...; et dans ces divers ordres, les fluxions sont toujours des quantités finies.

69. *Identité générale du concept fluxionnel et de celui des limites.*

Si dans une courbe on suppose, comme cela est évidemment permis, que le mouvement est uniforme suivant l'abscisse, il est clair que la fluxion de l'abscisse sera constante, et que celles des autres éléments de la courbe seront variables, puisque le point décrivant les *fluentes rectilignes* ne pourrait donner lieu à des fluxions constantes, qu'autant que le lieu définitif décrit fut une ligne droite.

D'après cela, de toutes les fluentes autres que l'abscisse, le mouvement devra être considéré pendant un temps variable, décroissant indéfiniment et tendant vers *zéro*, pour que ce mouvement puisse être considéré comme uniforme ; or la vitesse ayant pour mesure le rapport de l'espace décrit au temps affecté à cette description (temps proportionnel à l'accroissement de l'abscisse), on est ramené à chercher la limite des rapports des accroissements des diverses fluentes à celui de l'abscisse.

70. *Insuffisance du principe des fluxions.*

On a souvent rapproché à cette conception de faire intervenir la notion du mouvement. Il est vrai que l'idée de vitesse, quoique très-simple, devrait rester étrangère à l'exposition de l'analyse transcendante : lorsqu'il s'agit de grandeurs qui varient avec le temps, la théorie des fluxions donne la *signification réelle* des fonctions dérivées, dont l'importance et l'usage sont mis par cela même en évidence ; mais lorsqu'il s'agit de recherches purement analytiques cette seconde théorie de Newton est loin de venir en aide : elle est au contraire un obstacle sérieux.

D'ailleurs on doit reconnaître que jusqu'aujourd'hui l'on n'avait pas une idée bien satisfaisante et complète de ce que l'on entend par *vitesse* d'un point, lorsque cette vitesse est variable. Selon nous, M. *Lamarle* a donné, le premier, la vraie définition *générale* et rationnelle de cet élément ; nous reviendrons sur ce point.

71. *Notation fluxionnelle.*

La notation des fluxions consiste à surmonter d'un point (·) la fluente dont on veut indiquer la fluxion. Ainsi si l'on veut indiquer les fluxions des quantités x, y, on écrira

$$\dot{x} \text{ et } \dot{y}$$

De même

$$\ddot{x} \text{ et } \ddot{y}\ ,\ \dddot{x} \text{ et } \dddot{y}\ ,\ \text{etc.}$$

sont les fluxions du 2e, 3e, etc, ordre.

Il faut bien avouer que cette notation est absolument arbitraire, insignifiante et qu'elle ne peut être comparée au *d* LEIBNITZIEN.

CHAPITRE IV.

CONCEPT DE LAGRANGE.

72. Newton, dans le second livre de ses *Principes*, cherchant *la loi de la résistance nécessaire pour qu'un corps pesant, lancé dans un milieu, décrive une courbe donnée*, eut recours à la considération des séries ; il abandonna du reste cette solution, infirmée par Jean Bernouilli à l'aide de l'analyse infinitésimale, et démontrée *fausse* par Nicolas Bernouilli (neveu).

Newton, délaissant la méthode des séries, reprit ce problème, et en présenta une solution différente en suivant une marche analogue à celle du calcul différentiel.

Lagrange, revenant à l'idée des séries, crut que l'on pouvait en déduire une exposition *purement algébrique* de l'analyse transcendante. Il reprit la première solution de Newton, en fit ressortir l'erreur, discuta et anéantit la réfutation de Nicolas Bernouilli, et, corrigeant cette erreur qui n'est pas dans l'esprit de la méthode, il parvint à donner la rigueur désirable au procédé employé une seule fois par Newton.

73. Donnant à cette première idée toute l'extension possible, à l'aide d'un grand génie et d'une puissance analytique extraordinaire, *Lagrange considère, d'une manière générale le développement d'une fonction d'une variable à laquelle est attribué un accroissement.*

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x ; donnant à x l'accroissement i quelconque elle devient

$$f(x+i)$$

peut se développer en une série procédant suivant les puissances croissantes entières et positives de i, et dont les coefficients des diverses puissances de l'accroissement sont des fonctions de x, ayant avec la fonction primitive une loi de déduction facile à distinguer et à établir.

Ces coefficients sont les dérivées successives de $f(x)$, et leur ordre est égal au degré de la puissance de i à laquelle ils appartiennent dans $f(x+i)$.

Lagrange emploie ainsi dans la démonstration du théorème fondamental de sa nouvelle théorie, la *méthode des coefficients à déterminer :* il apporte toutefois et avec raison un soin minutieux à *établir à priori* la possibilité d'un tel développement, dont la forme cesse dès lors d'être une hypothèse. Il démontre pour cela que

1° *La fonction algébrique*, EN LAISSANT A x TOUTE SA GÉNÉRALITÉ, *ne peut renfermer de puissances* FRACTIONNAIRES *de i ;* et voici à cet égard et en peu de mots son raisonnement :

Supposons que $f(x+i)$ puisse contenir un terme de la forme

$$u \cdot i^{\frac{m}{n}}, \text{ ou, } u\sqrt[n]{i^m}$$

Il est incontestable que les radicaux qui sont dans $f(x)$, se présentent tous avec les mêmes indices dans $f(x+i)$ et que par suite $f(x+i)$ doivent avoir le même nombre n de valeurs différentes ; mais $f(x+i)$ devant, pour $i=0$, se réduire à $fx)$ qui est ainsi le premier terme du développement de $f(x+i)$, chaque valeur de $f(x)$ pourrait se combiner avec chacune des n valeurs de

$$\sqrt[n]{i^m}$$

Il s'en suivrait que $f(x)$ et $f(x+i)$ n'auraient plus le même nombre de valeurs différentes.

2° $f(x+i)$ *ne peut contenir de puissances négatives de i.*

En effet si le terme

$$\frac{r}{i^m}$$

pouvait exister dans ce développement, $f(x+i)$ deviendrait

∞ pour $i = o$, et comme $f(x + i)$ se réduirait alors à fx, il faudrait aussi que $f(x)$ devînt ∞ ce qui ne pourrait se présenter que par suite d'une *valeur particulière* attribuée à x.

Lagrange établit alors la loi de formation des coefficients des diverses puissances entières et positives de i, et démontre la formule

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{1.2} f''x + \frac{i^3}{1.2.3} f'''x + \ldots \text{ etc.}$$

74. Cette propriété analytique fondamentale suppose que les radicaux de $f(x)$ se présentent dans $f(x + i)$ avec les mêmes indices, ce qui exige, avons-nous vu, que x et i soient quelconques pour conserver ainsi la généralité la plus complète ; s'il n'en était pas ainsi, le théorème fondamental pourrait être en défaut, puisque des radicaux présents dans $f(x)$ pourraient ne pas exister dans $f(x + i)$, ou inversement.

75. Dans le développement de $f(x + i)$ les dérivées successives sont déduites l'une de l'autre par un procédé uniforme, et de la même manière que $f'x$ l'est de fx.

On peut donc choisir ces dérivées successives comme des auxiliaires de calcul, dont la dérivation est le puissant artifice.

76. *Insuffisance de la conception des dérivations.*

La théorie des dérivées de Lagrange laisse à désirer au point de vue trop absolu qui domine l'exposition de son théorème principal, qui semble ne pas tenir compte de l'état possible de non convergence du développement général en série : du reste cette observation n'accuse pas un vice radical de la méthode et n'est pas de nature à détruire la théorie des dérivations dont un exposé plus complet et plus abstrait pourrait, pensons-nous, satisfaire à cette exigence théorique.

La conception purement analytique de Lagrange, s'applique avec élégance et rigueur à toutes les questions analytiques ; mais elle est complètement insuffisante pour les applications dont le cachet n'est pas spécialement abstrait ; et l'on ne s'étonnera pas de l'impuissance pratique de cette méthode si l'on fait bien attention qu'il ne suffit pas de saisir *la dépendance mutuelle analytique de* $f'x$ *et* fx et des diverses dérivées en général, mais qu'il faut encore pouvoir découvrir la signification de cette correspondance, afin que, dans chaque cas où le caractère analytique ne domine plus,

l'on ait un instrument d'exploration certain et rapide, s'appliquant sans difficulté à chaque espèce de question.

En un mot Lagrange considère les propriétés des termes de $f(x+i)$; mais il ne recherche pas la raison d'être de chacune de ces propriétés, et c'est ce qui a fait dire à un esprit supérieur (*Bordas-Dumoulin*, CARTÉSIANISME) :

« *Lagrange prétend avoir dégagé le calcul différentiel de la* » *considération de l'infini, mais il serait plus juste de dire qu'il a* » *détruit cette admirable analyse.* On ne peut connaître les pro- » priétés des fonctions dérivées qu'autant que l'on considère l'in- » fini ; c'est seulement ainsi qu'on peut savoir ce que représente » la fonction prime dans une courbe, ou dans le mouvement accé- » léré. — Lagrange réduisait ainsi les principes du calcul différen- » tiel à un grossier mécanisme algébrique ou numérique. »

Toutefois ce critique ajoute :

« Les dérivées ont conduit Lagrange à étudier les fonctions » en elles-mêmes, indépendamment de toute application, ce qui » n'avait point été fait avant lui comme théorie expresse. »

77. De ce rapide et succint examen il nous paraît ressortir que la conception des dérivations ne s'approprie pas à la destination générale de l'analyse transcendante, et que par ses nouvelles quantités auxiliaires elle entrave singulièrement le passage du concret à l'abstrait, et ne facilite pas la mise en équation des lois mathématiques des phénomènes.

CHAPITRE V

—

Comparaison et rapprochement des trois grandes conceptions.

78. *Connexion générale de ces concepts.*

Après avoir indiqué très-sommairement quels sont les principes fondamentaux de chacune des trois grandes conceptions bien distinctes examinées précédemment, jetons un coup d'œil général sur les rapports qu'elles ont entr'elles, cherchons à apprécier *leurs degrés respectifs de fécondité pratique* , pour décider ensuite celle qui réunit le plus d'avantages au point de vue de son aptitude générale à l'établissement des équations.

79. L'étude mathématique des phénomènes d'un ordre ou de l'autre, ne pouvant en général être faite d'une manière directe et immédiate , on a recours, pour l'expression de la loi de continuité dans la variation des grandeurs , à certains auxiliaires ou quantités secondaires ; c'est ainsi que l'on a des *équations différentielles, des équations limites*, et des *équations dérivées*.

Un point très important à établir ici c'est que si les diverses conceptions considèrent ces auxiliaires sous des points de vues très-différents, il y a *identité absolue entre ces quantités secondaires de l'un et de l'autre système*.

Dans la méthode des limites les grandeurs dont on étudie la continuité sont supposées passer immédiatement d'une valeur à une autre ; on resserre ensuite l'intervalle de ces deux états arbitraires et auxiliaires, et puis, considérant dans ces variations les limites vers lesquelles tendent *continûment* ces grandeurs lorsque cet intervalle tend par *décroissement continu* à s'anéantir, on parvient le plus souvent après un long détour, au résultat que le calcul infinitésimal donne directement par l'évanouissement des infiniments petits d'ordre supérieur.

Cette seule réflexion fait prévoir quelle doit être la supériorité, quant à la rapidité des applications, de la méthode infinitésimale.

Relativement aux fonctions dérivées (celle du premier ordre par exemple), du développement taylorien

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{1\cdot 2} f''x + \text{etc.}$$

on déduit quelque soit i :

$$f'x + \frac{i}{1\cdot 2} f''x + \text{etc.} = \frac{f(x+i) - fx}{i}$$

Et i tendant vers o, il est clair que $f'(x)$ devient la limite vers laquelle converge le rapport de l'accroissement d'une fonction à celui de sa variable.

$f'x$, au point de vue différentiel n'est même que le rapport de la différentielle de la fonction à celle de la variable, et l'on sait que le calcul infinitésimal, pour former la différentielle première d'une fonction, ne prend de l'expression générale de l'accroissement de la fonction, que le terme qui ne renferme que la première puissance de l'accroissement infiniment petit de la variable.

Concluons donc que le $\frac{dy}{dx}$ leibnitzien, le $\mathrm{L}\frac{dy}{dx}$ newtonnien, et le $f'(x)$ analytique de Lagrange, sont une seule et même chose, une seule et même fonction auxiliaire, dont l'*appréciation spéciale et fondamentale* caractérise les trois grandes conceptions qui se partagent l'exposition de l'analyse transcendante.

80. *Inconvénients essentiels des trois méthodes.*

Quant à la méthode infinitésimale nous avons établi suffisamment croyons-nous, l'irrationalité de son principe fondamental, ainsi que l'*absurdité* de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f'x + dx\cdot \mathrm{K} = f'x$$

dans laquelle dx n'est pas seul, bien qu'étant infiniment petit.

81. Quant à la méthode *fluxionnelle*, il y a d'abord à remarquer que *Newton* doit poser $dx = o$, pour faire disparaître le terme $\mathrm{K}\cdot dx$ de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f'x + \mathrm{K}\,dx = f'x$$

obtenue à l'aide de considérations de mouvement.

Or malgré tout ce que l'on pourra dire, toujours est-il que *Newton* cherche ce qui se passe entre *dy* et *dx* alors que ces quantités *cessent d'exister*.

De plus la définition de la vitesse ne permet pas de comprendre le mouvement continûment accéléré ou retardé, sans concevoir le temps et l'espace décomposés en une suite d'éléments indivisibles ; ce qui est logiquement impossible.

On comprend donc que la théorie fluxionnelle pèche par sa base en cet endroit, et qu'au fond des choses cette idée de mouvement basée sur la *fausse définition de la vitesse*, fait retomber Maclaurin et Newton dans le principe infinitésimal.

Du reste et indépendamment de ce reproche, la génération par mouvement des grandeurs quelconques présente souvent des difficultés très-grandes, *et le passage du concret à l'abstrait* est rendu par cela même ou impossible, ou trop difficile et presque toujours très-long.

Newton et Maclaurin eussent sans doute saisi la clef de ce passage, s'ils n'avaient été sous l'influence encore persistante aujourd'hui d'une fausse notion et définition de la vitesse. Newton avait cependant compris que dans le mouvement varié *la vitesse est* MESURÉE *en un instant donné par l'espace qui serait décrit pendant l'unité de temps, si le mouvement* PERSISTAIT *dans l'état qui le caractérise à cet instant ;* mais n'établissant pas de cette notion précise la correspondance analytique, Newton laissa sa méthode impuissante ; et c'est en saisissant, en maintenant et en coordonnant cette correspondance, que monsieur Lamarle fut conduit à sa nouvelle conception.

Comme théorie, la méthode fluxionnelle doit donc être rejetée, et la pratique souffre beaucoup des longueurs qu'entraîne son adoption.

82. Quant à la méthode des dérivées, dont nous avons exposé le raisonnement qui en établit la base, elle est rigoureuse ; elle fait connaître le lien *analytique* des diverses dérivées, mais sans découvrir le sens de cette dépendance : en un mot elle recueille l'effet, et sans s'inquiéter de la cause qui l'a produit, elle ne considère que des accroissements effectifs.

D'ailleurs, il est à remarquer qu'en considérant ainsi ces accroissements effectifs, Lagrange réalise une suite *discontinue* d'états, *variables brusquement* de l'un à l'autre, ce qui permettrait même *en toute rigueur* d'affirmer que la théorie de Lagrange est *la négation du principe de continuité*.

Qu'on ne s'étonne pas dès lors de l'impuissance pratique de cette conception, qui est du reste d'une exposition assez difficile et longue, comprenant des développements compliqués et subtils.

83. Nous avons vu les avantages et les défauts principaux de chacune des trois grandes conceptions de Leibnitz, de Newton, de Lagrange ; et c'est précisément leur insuffisance au point de vue rationnel , ou la difficulté plus ou moins grande de leur appropriation pratique, qui laissent tantôt à l'une tantôt à l'autre, la supériorité dans un ordre déterminé de spéculations.

Cette espèce d'incertitude, dans le choix à faire parmi ces méthodes, est la conséquence forcée des vices de chacune, et conduit à employer celle de ces méthodes qui se prête avec le plus de rigueur et de facilité à l'exposition de *chaque* question en particulier. Il en résulte dans l'état actuel de la science un étrange amalgame des trois méthodes , et l'absence complète de toute doctrine ; et c'est sans doute, quant à l'exposition des calculs supérieurs, à cette fusion bizarre illogique et irrationnelle, que l'on doit attribuer *cette espèce de complaisance* avec laquelle certains esprits ont accueilli des théories aussi monstrueuses que *celle des infinis*.

SECONDE PARTIE.

SECTION II.

Conception de M. Lamarle.

Nous croyons avoir suffisamment établi, par ce qui précède, la nécessité, aux points de vue scientifique et pratique, d'une *conception rigoureuse, inattaquable dans ses principes fondamentaux, établissant* a priori *les circonstances diverses et générales qui peuvent se présenter dans la variation d'une fonction, et possédant* au moins *au même degré la promptitude et la facilité qui caractérisent dans les applications, le calcul infinitésimal.*

Cette conception est celle de M. Lamarle, et nous allons essayer d'en résumer les points principaux, de manière toutefois à permettre d'en saisir complètement l'esprit et le mode général et uniforme des applications.

CHAPITRE I.

Examen a priori des divers états que peut présenter le rapport.

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}$$

84. *Conditions préliminaires.*

Soit la fonction $y=f(x)$, et désignons par x_0 et x_p les va-

leurs particulières de x dont l'intervalle est parcouru par x d'une *manière* CONTINUE.

Parmi les diverses espèces de fonctions il y en a un grand nombre présentant, pour une même valeur de la variable, plusieurs valeurs différentes ; nous ne considérons que l'un des systèmes ainsi possibles, *système supposé* CONTINU pour toute valeur de x comprise entre x_0 et x_p, et dans toute l'étendue duquel y a toujours UNE *valeur unique, réelle* et *déterminée*, c'est-à-dire ATTEINTE par la fonction.

Il est essentiel et tout à fait important de ne pas confondre ces valeurs réelles, effectives d'une fonction avec les limites vers lesquelles peuvent converger ces mêmes fonctions pour certaines valeurs particulières de la variable.

85. Pour écarter toute complication prématurée, il est nécessaire de remarquer que y peut ne pas être constamment croissante ou constamment décroissante dans l'intervalle $x_p - x_0$; la fonction peut en effet passer par un certain nombre de valeurs maximum ou minimum ; mais *si l'on considère l'intervalle* $x_p - x_0$ SUFFISAMMENT RESTREINT, *l'on peut évidemment dire que* y *pendant cet intervalle croit ou décroit continûment.*

Les circonstances que nous aurons à analyser impliquent des résultats identiques, que la fonction soit croissante, ou décroissante ; nous étudierons de préférence le cas de croissance.

86. En donnant à x l'accroissement h, représentons par Δy et Δx les accroissements simultanés de la fonction et de sa variable.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est en général une fonction de x et de h ; quant à sa nature, on peut faire et l'on doit examiner les trois hypothèses:

1° $\frac{\Delta y}{\Delta x} = C$ Constante absolue (Indépendant de x et h)

2° $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi x$ (Indépendant de h)

3° $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \psi h$ (Indépendant de x

87. *Premier cas* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = C$

THÉORÈME. I. *Le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *ne peut être constant pour un intervalle quelconque quels que soient* x *et* h, *que si y est une fonction linéaire de la forme*,

$$y = Cx + C'$$

Démonstration. On a par hypothèse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C, \text{ ou, } f(x+h) - f(x) = Ch$$

Et

$$f(x+h) = fx + Ch$$

Changeant x en h et inversement, ce qui est possible puisque nulle modification n'est ainsi introduite dans le premier membre, on aura :

$$fx + Ch = fx + Cx$$

ou

$$fx - Cx = fh - Ch$$

Représentant par C' la nouvelle constante $fh - Ch$, on aurait donc

$$fx - Cx = C',$$

d'où

$$fx = Cx + C'$$

C'est-à-dire que fx est une fonction linéaire.

88. THÉORÈME II. *Réciproquement, pour toute fonction linéaire,*

$$y = Cx + C'$$

et pour un intervalle quelconque, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *est constant.*

Démonstration. De $y = Cx + C'$, on déduit :

$$y + \Delta y = Cx + C \cdot \Delta x + C'$$

Et par suite :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C$$

89. Théorème III. *Lorsque les accroissements de deux fonctions d'une même variable x sont égaux, pour toute l'étendue d'un même intervalle quelconque Δx,* la différence *des fonctions est* constante *ou* nulle *dans toute l'étendue de cet intervalle.*

Démonstration. fx et Fx étant ces fonctions, l'on donne

$$f(x + h) - fx = F(x + h) - F(x)$$

D'où

$$f(x + h) - F(x + h) = fx - Fx$$

Ici encore le premier membre restant identique par le changement de x en h, et de h en x, on aura

$$fx - Fx = fh - Fh$$

Ce qui prouve qu'en effet la différence des fonctions est *constante.*

90. *Deuxième cas.* $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right.$ est indépendant de $\left.h\right)$.

Théorème IV. *Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne peut, pour tout intervalle, être indépendant de h, à moins qu'il ne le soit aussi de x,* ou en d'autres termes *à moins qu'il ne soit constant.*

Démonstration. Désignant par

$$C = \varphi x$$

le rapport, on a

$$f(x + h) - fx = Ch. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Changeons x en $x + h$, il viendra en remarquant que $\varphi(x)$ change nécessairement

$$f(x + 2h) - f(x + h) = C_1 h \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Par addition de (1) et (2), on aura

$$f(x + 2h) - fx = (C + C_1) h$$

Or, si dans l'expression primitive du rapport on remplace h par $2h$, il viendra :

$$f(x + 2h) - f(x) = 2Ch$$

D'où

$$C_1 = C$$

C étant, ou *pouvant par* HYPOTHÈSE, *être* fonction de x, fournirait, par le changement qui y a été fait de x en $x + h$, une fonction de h ; C_1 dépend donc de h, et l'égalité $C_1 = C$ montre clairement que

C_1 *ne peut d'une part dépendre de* h, *et d'autre part que* C *ne peut dépendre de* x.

Par suite C devrait être constant.

91. *Troisième cas* $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ est indépendant de } x\right)$.

THÉORÈME V. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *ne peut être indépendant de* x, *sans l'être en même temps de* h.

C étant fonction de h *seulement*, on a toujours,

$$f(x + h) - fx = Ch$$

Premièrement : Divisons l'accroissement h en un nombre entier m d'accroissements partiels représentés chacun par h_1, et soit C_1 la valeur que prend C lorsque h est remplacée par h_1 ; en remarquant que C_1 est indépendant de x, et constant pen-

dant tout l'intervalle h parcouru à l'aide de h, il viendra successivement

$$f(x + h_1) - fx = C_1 h$$

$$f(x + 2h_1) - f(x + h_1) = C_1 h$$

$$f(x + 3h_1) - f(x + 2h_1) = C_1 h_1$$

. . . . . .

$$f(x + h) - f(x + \overline{n-1} \cdot h_1) = C_1 h_1$$

D'où par addition :

$$f(x + h) - f(x) = m C_1 h_1$$

La combinaison de cette équation avec celle de départ

$$f(x + h) - f(x) = C h$$

donne

$$mC h = Ch$$

D'où

$$C_1 = C$$

Secondement. Supposons que $h' = nh_1$, h' étant une valeur possible de h, c'est-à-dire soumise aux conditions générales auxquelles obéit l'accroissement h, et n un nombre entier, il est clai que de même que l'on vient de voir, l'on aura encore :

$$f(x + nh) - fx = nC_1 h_1 = C_1 h'$$

Et comme $C_1 = C$,

$$f(x + h') - f(x) = Ch'$$

Mais si dans

$$f(x+h) - f(x) = Ch$$

l'on remplace h par h', on aura en désignant par C' la valeur que prend alors C (qui est une fonction de h),

$$f(x+h') - fx = C'h'$$

Cette équation combinée à la précédente donne :

$$C = C'$$

D'où

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = \frac{f(x+h') - fx}{h'}$$

C est donc une constante absolue pour tout accroissement commensurable avec h ; et comme la fonction est *continue*, cette même conséquence existe encore pour le cas de l'incommensurabilité entre h et h'.

92. Réserve étant faite du cas des fonctions linéaires, il est donc permis de conclure sous forme de

Théorème général : *Le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *est une fonction de* x *et de* h.

93. La question qui fait l'objet de ce chapitre est la suivante :

Que devient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *lorsque* $\Delta x = h$ *converge vers zéro ?*

C'est l'étude de la variation de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ qui donne lieu aux propriétés suivantes :

94. Lemme I. *Pour des valeurs quelconques et particulières de* x *et de* h, *le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *affecte toujours une valeur unique, réelle et déterminée.*

C'est là une conséquence immédiate des hypothèses, générales et toujours possibles, faites au début sur la nature d'une fonction.

95. Lemme II. *Le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *est continu relativement à chacune des quantités* x *et* h.

Démonstration. Soit $i < h$, i tendant de même que h vers zéro ; dans l'expression du rapport changeons x en $x+i$, puis h en $h+i$, afin de traiter *simultanément* les quantités x et h ; il viendra :

$$(\alpha)\quad \cdots \frac{f(x+i-h)-f(x+i)}{h} - \frac{f(x+h)-fx}{h} = \frac{f(x+i+h)-f(x+h)-[f(x+i)-fx]}{h}$$

Et de même :

$$\frac{f(x+h+i)-f(x)}{h+i} - \frac{f(x+h)-fx}{h} = \frac{hf(x+h+i)-hf(x)-(h+i)f(x+h)+(h+i)f(x)}{h(h+i)}$$

ou encore

$$(\beta)\cdots \frac{f(x+h+i)-f(x)}{h+i} - \frac{f(x+h)-f(x+h(-f(x)}{h} = \frac{f(x+h+i)-f(x+h)}{h+i}\,\frac{i}{h+i}\,\frac{f(x+h-f(x)}{h}$$

Les seconds membres des relations (α) et (β) convergent évidemment vers *zéro*, avec i ; donc

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *est une fonction* continue *de* x *et de* h.

96. Pour une valeur particulière de x (h tendant vers *zéro*), il y a lieu de considérer le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ comme, pouvant dans ses variations ;

1° Croître indéfiniment.

2° Converger vers une limite constante.

3° Osciller sans fin entre plusieurs limites constantes.

4° Converger vers une limite dépendante de x et variable avec cette quantité.

97. Théorème VI. *Il n'est aucun intervalle dans toute l'étendue duquel le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *puisse croître indéfiniment, h convergeant vers zéro.*

Démonstration. Désignons par x_1 et x_p les limites de l'intervalle Δx, et par x_e une valeur intermédiaire pour laquelle on

considère une valeur h_e de h, assez petite pour que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ croissant toujours à mesure que h diminue, on puisse avoir (K étant une quantité qui peut devenir aussi grande que l'on veut)

$$\frac{f(x_e + h_e) - fx_e}{h_e} > K$$

D'ailleurs, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondant à l'intervalle $x_p - x_1$ étant *réel* et *déterminé*, on a eu soin de faire en sorte que

$$K > \frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1}$$

Prenons successivement des quantités h_1, h_2, h_3,..... h_{n-1}, h_n, telles que

$$\begin{aligned}
x_1 + h_1 &= x_2 \\
x_2 + h &= x_3 \\
x_3 + h &= x_4 \\
&\vdots \\
x_{n-1} + h_{n-1} &= x_n \\
x_n + h_n &= x_{n+1}
\end{aligned}$$

Ces quantités étant assez petites pour qu'à l'aide de ces accroissements successivement introduits dans les termes du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on ait :

$$\begin{aligned}
f(x_1 + h_1) - f(x_1) &> Kh_1 \\
f(x_2 + h_2) - f(x_2) &> Kh_2 \\
f(x_3 + h_3) - f(x_3) &> Kh_3 \\
&\vdots \\
f(x_{n+1} + h_{n-1}) - f(x_{n-1}) &> Kh_{n-1} \\
f(x_n + h_n) - f(h_n) &> Kx_n
\end{aligned}$$

D'où par addition

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) > K\,(h_1 + h_2 + h_3 + \cdots\cdots + h_n)$$

Mais on a aussi :

$$x_{n+1} = h_1 + h + h_3 + \cdots\cdots + h_n + x_1$$

Et si l'on suppose, ce qui est évidemment permis,

$$x_{n+1} = x_p$$

On aura :

$$x_p - x_1 = h_1 + h_2 + h + \cdots\cdots + h_n$$

D'où, après substitution ,

$$f(x_p) - f(x_1) > K\,(x_p - x_1)$$

et

$$K < \frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1}$$

Ce résultat et l'hypothèse étant contradictoires , l'hypothèse est inadmissible.

98. Théorème VII. *Il n'est aucun intervalle dans toute l'étendue duquel le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *puisse converger toujours vers une même limite* C *constante, pendant que h décroit indéfiniment.*

Démonstration. En laissant à (x_1, x_p), (x_e, h_e), (x_1, h_1), $(x_2, h_2)\cdots\cdots$ (x_n, h_n) les mêmes définitions que dans le théorème précédent, représentons par η une quantité arbitraire que l'on peut prendre aussi petite que l'on veut, et par η_e , $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \cdots\cdots, \eta_n$ des quantités plus petites que η et qu'il faut ajouter respectivement à C pour exprimer la convergence de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vers C, à mesure que h tend vers zéro.

On aura en général,

$$\frac{f(x_e + h_e) - fx_e}{h_e} = C + \eta_e$$

ou

$$f(x_e + h_e) - f(x_e) = Ch_e + h_e \eta_e$$

On a de plus

$$\begin{aligned} x_1 + h_1 &= x_2 \\ x_2 + h_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x_n + h_n &= x_{n+1} \end{aligned}$$

D'où par addition

$$x_{n+1} - h_1 = h_1 + h_2 + \cdots\cdots + h_n$$

ou

$$x_p - x_1 = h_1 + h_1 + \cdots\cdots + h_n$$

Particulièrement, pour chacun de ces accroissements successifs, on aura :

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1) - fx_1 &= Ch_1 + h_1 \eta_1 \\ f(x + h_2) - f(x_1 + h_1) &= Ch_2 + h_2 \eta_2 \\ f(x_3 + h_3) - f(x_2 + h_2) &= Ch_3 + h_3 \eta_3 \\ &\vdots \\ f(x_n + h_n) - f(x_n) &= Ch_n + h_n \eta_n \end{aligned}$$

Additionnant membre à membre, il viendra :

$$f(x_{n+1}) - fx_1 = C(h_1 + h_2 + \ldots\ldots + h_n) + h_1\eta_1 + h_2\eta_2 + \ldots\ldots + h_n\eta_n$$

ou

$$fx_p - fx_1 = C(x_p - x_1) + h_1\eta_1 + h_2\eta_2 + \cdots\cdots\cdots + h_n\eta_n$$

On a supposé que chacune des quantités $\eta_1\ \eta_2 \cdots\cdots \eta_n$ est plus petite que η, donc

$$fx_p - fx_1 < C(x_p - x_1) + (h_1 + h_2 + \cdots\cdots + h_n)\eta$$

ou

$$fx_p - fx_1 < C(x_p - x_1) + (x_p - x_1)\eta$$

D'où

$$\frac{fx_p - fx_1}{x_p - x_1} < C + \eta$$

Et si l'on veut rétablir l'égalité à l'aide d'un coëfficient de réduction $\mu < 1$, il viendra :

$$\frac{fx_p - fx_1}{x_p - x_1} = C + \mu\eta$$

D'ailleurs comme les quantités

$$\frac{fx_p - fx_1}{x_p - x_1} \text{ et } C$$

sont l'une et l'autre constantes, cette équation exige que l'on ait,

$$\eta = 0$$

Et par suite

$$\eta_1 = \eta_2 = \cdots\cdots\cdots = \eta_n = 0$$

Ce qui démontre la proposition.

99. *Corollaire.* On a donc toujours ici

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\mathrm{C}$$

ce qui exige, d'après ce que nous avons vu précédemment, (C *étant une constante*), que l'on ait

$$fx=\mathrm{C}x+\mathrm{C}'$$

Donc :

Si en même temps que h *converge vers zéro le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *diffère de moins en moins et d'aussi peu que l'on veut d'une limite constante* C, *ce rapport est rigoureusement égal à* C.

100. Pour une même valeur particulière de x et quant aux limites entre lesquelles est supposé osciller sans fin le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, deux circonstances bien distinctes sont à remarquer :

1° Ces limites pourraient tendre sans cesse l'une vers l'autre, et donner ainsi lieu à ne considérer qu'*une seule limite intermédiaire.*

On rentre alors dans les considérations déjà exposées.

2° Mais *ces limites pourraient aussi conserver entr'elles un écart déterminé.*

Suivons les conséquences qu'implique cette dernière hypothèse.

Pendant les changements qu'éprouve $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ce rapport passe alternativement et indéfiniment de l'état croissant à l'état décroissant, et inversement.

De là résultent des *maxima* et des *minima* correspondant à des valeurs de h qui diffèrent sans cesse de moins en moins.

101. Parmi ces divers maxima, il y en a donc *un*, constituant *une vraie limite supérieure* vers laquelle convergent tous les autres ; ou bien *un de ces maxima* est supérieur à tous ceux qui le suivent.

Considérons en particulier cette dernière hypothèse :

Soit M *ce maxima plus grand que chacun des suivants*, dont l'ensemble comprendra un plus petit maxima M', et constituera une série décroissante et convergeant vers une *limite inférieure* M'. Dans le cas du *plus petit maxima* M', il y aura convergence vers une limite intermédiaire entre M et M', ou oscillation continue et indéfinie entre ces quantités : dans le cas de la limite inférieure M' par suite de décroissance continue des maxima successifs, il y a oscillation incessante entre M' et M.

102. Dans ces oscillations, les maxima peuvent être répartis en deux catégories, dont la première converge vers la limite supérieure M, et la seconde vers la limite inférieure M' ; à ces deux classes correspondent deux séries de valeurs de h indéfiniment décroissantes.

Des déductions analogues s'appliquent aux plus petits *minima* qui constituent une suite qui tend en croissant ou en décroissant vers *une limite inférieure* l, pendant que *celle des plus grands maxima* tend de la même manière vers une limite supérieure L.

Ainsi en résumé les oscillations ont lieu entre deux limites distinctes L et l.

103. Théorème VIII. *Les limites* L *et* l *obéissent à la loi de continuité lorsque la variable* x *croit avec* continuité *pendant un même intervalle quelconque.*

Démonstration. Occupons nous d'abord de L.

Soient :

$x_1\ x_2\ x_3$ . . . . . la suite des valeurs de x ;

$L_1\ L_2\ L_3$ . . . . la suite correspondante des valeurs de L

$h_1\ h_2\ h_3$ . . . . » » « h

Cette dernière suite est telle qu'à partir de chacun de ses accroissements, en représentant par η une quantité qui s'approche continûment de *zéro*, l'on ait toujours :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = L + \eta$$

Désignons par h_ε la plus petite des valeurs de h, et disposant de h prenons toujours

$$h < h_\varepsilon$$

Pour x_n et L_n, on aura donc

$$\frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} = L_n + \eta_n$$

Soit

$$i < h, \text{ et à fortiori } i < h_\varepsilon$$

i pouvant s'approcher indéfiniment de zéro : donnons dans cette dernière équation à x_n l'accroissement i; le changement ξ éprouvé par le premier membre sera d'autant plus petit que i différera moins de zéro.

On a ainsi

$$\frac{f(x_n + i + h) - f(x_n + i)}{h} = L_n + \eta_n + \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Posons

$$x_n + i = x_p$$

Observons que l'on peut approcher *autant que l'on veut* de la valeur L_p de L relative à x_p; l'accroissement h_p correspondant donne, à cause de l'hypothèse faite sur h_ε,

$$h_p > h_\varepsilon$$

D'ailleurs

$$h_\varepsilon > h$$

Donc

$$h_p > h$$

Si directement l'on considérait le rapport relatif à L_p, on aurait

$$L_p + \eta_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Puisque dans l'équation (a) on a donné à x_p ou $x_n + i$ l'accroissement h moindre que h_p, ce rapport (a) s'approchera plus de L_p que ne le fait le rapport (b).

Donc premièrement :

$$L_n + \eta_n + \xi < L_p + \eta_n$$

Cependant remarquons en dernier lieu que d'après la valeur de h il pourrait se faire que

$$L_n + \eta_n + \xi > L_p$$

Mais alors la différence entre ces deux rapports ne pourra jamais excéder η_p qui exprime le complément le plus grand possible de L_p, c'est-à-dire le degré d'approximation.

On aura donc :

$$L_n + \eta_n + \xi \leqq L_p + \eta_p$$

ou

$$L_n - L_p \leqq \eta_p - \eta_n - \xi$$

Si l'on remarque actuellement que les diverses quantités η_n, η_p et h convergent en même temps vers zéro, et qu'il en est de même de ξ avec i, on en conclura que :

S'il y a excès de L_n *sur* L_p, *cet excès tend vers* zéro, *lorsque* x_n *et* x_p *se rapprochent indéfiniment.*

104. Dans ce qui vient d'être dit nous sommes passé de x_n à x_p ; si l'on voulait *inversément* passer de x_p à x_n, on raisonnerait d'une manière analogue à l'aide de $x_p - x_1$, et l'on établirait aisément que :

S'il y a excès de L_p *sur* L_n, *cet excès tend vers* zéro *lorsque* x_p *et* x_n *se rapprochent indéfiniment.*

La simultanéité de ces deux conclusions démontre que :

L ne subit aucun changement brusque *lorsque x croit continûment.*

105. Tout ce que l'on démontre ainsi pour L se maintient aussi pour *l*.

106. Théorème IX. *Il n'est aucun intervalle dans toute l'étendue duquel le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *puisse osciller sans fin entre deux limites distinctes, à mesure que* h *converge vers zéro.*

Démonstration. Dans l'intervalle quelconque supposé, soient deux états particuliers x_1 et x_p de x assez rapprochés pour que les variations de L et l soient individuellement excessivement petites ; soit de plus x_e une valeur intermédiaire, et (L_e , l_e) les limites correspondantes. Il vient :

$$L_e = L_1 + \alpha_e$$

$$l_e = l_1 + \beta_e$$

α_e et β_e ayant par convergence, *zéro* pour limite.

Soit encore

$$x_e + h_e = x_{e+1}$$

h_e étant suffisamment petit, l'on aura γ_e et η_e étant aussi petits que l'on veut :

$$\frac{f(x_e + h_e) - f(x_e)}{h_e} = L_e + \gamma_e = L_1 + \alpha_e + \gamma_e = L_1 + \eta_e$$

ou

$$f(x_e + h_e) - f(x_e) = L_1 h_e + h_e \eta_e$$

Partageons l'intervalle x_1 à x_p, à l'aide de valeurs particulières x_2, x_3, ... à chacune desquelles nous appliquerons ce qui vient d'être obtenu pour x_e ; nous aurons :

$$\begin{aligned} x_1 + h_1 &= x_2 \\ x_2 + h_2 &= x_3 \\ x_3 + h_3 &= x_4 \\ &\vdots \\ x_n + h_n &= x_{n+1} \end{aligned}$$

D'où

$$x_{n+1} = x_1 h_1 h_2 h_3 + \ldots + h_n \ldots (\varrho)$$

et

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1) - f(x_1) &= L_1 h_1 + h_1 \eta_1 \\ f(x + h_2) - f(x_2) &= L_1 h_2 + h_2 \eta_2 \\ f(x_3 + h_3) - f(x_3) &= L_1 h_3 + h_3 \eta_3 \\ &\vdots \\ f(x_n + h_n) - f(x_n) &= L_1 h_n + h_n \eta_n \end{aligned}$$

Par addition l'on obtient ,

$$fx_{n+1} - f(x_1) = (h_1 + h_2 \ldots + h_n) L_1 + \eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \ldots + \eta_n h_n \ldots (\varrho_2)$$

Si x_{n+1} n'est pas égal à x_p soit i la différence que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut, c'est-à-dire soit

$$x_{n+1} = x_p - i$$

L'équation (ϱ) devient

$$x_p - i - x_1 = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots + h_n$$

D'où (ϱ_1) sera

$$\frac{f(x_p - i) - fx_1}{x_p - i - x_1} = L_1 + \frac{\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \ldots\ldots\ldots + \eta_n h_n}{x_p - i - x_1}$$

Si η désigne la plus grande des valeurs $\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots \eta_n$, on pourra écrire :

$$\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \cdots\cdots + \eta_n h_n < (h_1 + h_2 + \cdots\cdots + h_n)\,\eta$$

ou

$$\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \cdots\cdots + \eta_n h_n < (x_p - i - x_1)\,\eta$$

On obtient alors

$$\frac{f(x_p - i) - f(x_1)}{x_p - i - x_1} = L_1 + < \eta$$

Et si μ est un facteur convenable de réduction moindre que l'unité, on a

$$\frac{f(x_p - i) - f(x_1)}{x_p - i - x_1} = L_1 + \mu\,\eta \quad (\varrho_2)$$

D'ailleurs évidemment ξ *convergeant avec* i *vers zéro,*

$$\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1} - \frac{f(x_p - i) - f(x_1)}{x_p - i - x_1} = \xi \quad (\varrho_3)$$

L'addition des équations (ϱ_2) et (ϱ_3) donne :

$$\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1} = L_1 + \mu\eta + \xi \quad (\varrho_4)$$

Raisonnant et opérant sur l_1 identiquement comme nous venons de le faire sur L_1 on obtiendrait, en désignant par μ', η', ξ' les quantités analogues à μ, η, ξ ,

$$\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1} = l_1 + \mu'\eta' + \xi' \quad (\varrho_5)$$

La combinaison de (ϱ_4) et (ϱ_5) conduit à

$$L_1 - l_1 = \mu'\eta' + \xi' - \mu\eta - \xi$$

Et si nous nous rappelons que les limites L_1 et l_1 ont entr'elles par hypothèse, un intervalle déterminé, il devient évident que cette dernière équation est impossible, puisque les diverses quantités η, η', μ, μ', ξ, ξ' qui composent son second membre, convergent chacune vers zéro, c'est-à-dire peuvent décroître chacune indéfiniment.

Concluons de ce qui précède que *les limites* L_1 *et* l_1 *se confondent.*

107. D'après l'examen qui vient d'être fait de la possibilité qu'il y aurait pour $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dans ses variations ($x$ parcourant un intervalle quelconque déterminé) de

1° Croitre sans limites.

2° Converger vers une limite constante.

3° Osciller sans fin entre deux limites distinctes ;

nous sommes arrivés à démontrer que si de pareils états sont accidentellement possibles, lorsque $h = \Delta x$ converge vers zéro, aucune de ces trois circonstances ne peut être permanente pour *l'étendue entière* d'une partie quelconque de l'intervalle assigné, parcouru *continûment* par la variable x.

Delà on déduit évidemment que le quatrième état par suite duquel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *converge vers une limite variable avec* x, *est le seul possible d'une* MANIÈRE PERMANENTE.

108. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lorsque h s'approche indéfiniment de zéro, converge donc vers une limite variable (fonction de x), que nous pouvons désigner par $f'x$; et si η, ayant zéro pour limite, représente l'approximation pour un état quelconque, on pourra écrire :

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = f'x + \eta$$

et

$$\text{limite} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'x$$

On donne à $f'(x)$ par rapport à $f(x)$ le nom de fonction dérivée ; $f(x)$ est alors *la fonction primitive.*

109. Fixons bien nos idées par rapport à x, sur le sens à attacher à l'équation

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = f'x + \eta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

h prend des valeurs différentes pour chacune des valeurs de x comprises dans l'intervalle où l'on établit l'équation, et pour une de ces valeurs particulières, l'équation (a) signifie qu'à partir d'une certaine valeur, ou *limite*, h' de h, le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, diffère d'autant moins de $f'x$ que cet accroissement s'approche plus de zéro ; *il n'existe donc aucune valeur intermédiaire, prise dans cet intervalle, pour laquelle* h' *puisse être nulle.*

Deux hypothèses seulement peuvent être faites quant à la grandeur de cette limite ; on peut dire :

1° Parmi les diverses valeurs de h', il n'en est aucune qui soit moindre qu'une certaine valeur déterminée et assignable d'avance.

2° Les diverses valeurs de h' décroissent indéfiniment, à mesure que x approche *continûment* de certaines valeurs particulières.

L'examen comparatif de ces hypothèses n'est pas nécessaire ; l'exclusion de valeurs spéciales de x pour l'intervalle étudié est, comme nous allons le faire voir, *suffisante.*

Soient, dans l'ordre où l'intervalle même les présente

$$x\ ,\ x_a\ ,\ x_b\ ,\ x_c\ ,\ \ldots\ ,\ x_p$$

les valeurs ISOLÉES de x pour lesquelles les limites h' correspondantes décroissent sans cesse et tendent vers *zéro ;* puisque h' diminue à mesure que l'on parcourt la série de ces valeurs isolées, on a toujours :

$$h'_a < h'_b < h'_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Cependant la plus petite de ces limites devant être *déterminable,*

pour rester dans la pleine application de la formule (*a*) il suffit de ne pas prendre les valeurs extrêmes

$$x_a, x_b, x_c, \ldots \ldots \ldots \ldots$$

des divers intervalles partiels dans lesquels l'intervalle primitif de x_i à x_p avait été partagé ; et c'est évidemment une chose toujours possible que de partager convenablement l'intervalle $x_p - x_i$.

110. Partant de là, effectuons le parcours de cet intervalle, à l'aide de la quantité

$$x \pm i$$

dans laquelle i, recevant des valeurs aussi petites que le besoin l'exige, permet de faire passer $x \pm i$ par toutes les valeurs comprises dans les intervalles partiels correspondant aux valeurs isolées de la variable x.

Démontrons ce théorème si important :

La fonction f'x *est généralement* CONTINUE. On a ici, d'après la formule (*a*) n° 26, en remplaçant x par $x \pm i$:

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = f'x + \eta$$

$$\frac{f(x \pm i + h) - f(x \pm i)}{h} = f'(x \pm i) + \eta$$

Soit ξ la différence de ces deux rapports :

$$\xi = f'(x \pm i) + \eta' - f'x - \eta$$

ou

$$f'(x \pm i) - f'x = \xi + \eta - \eta' \ldots \ldots \quad (b)$$

Or il n'est pas contestable que ξ diminue et tend vers zéro, en même temps que i ; de plus et indépendamment de cette dé-

croissance indéfinie propre à ξ, les quantités η et η' tendent aussi vers o avec h donc

$$\xi + \eta - \eta'$$

peut être rendu, ou maintenu, aussi petit que l'on veut : $f'x$ ne peut donc varier brusquement, et est ainsi une *fonction continue.*

111. Nous avons considéré, jusqu'à ce moment, l'accroissement h comme *positif*, et il est à prévoir, par l'ensemble de la théorie précédente, que la continuité de $f'x$ existe encore pour h négatif.

L'induction revêt ici un caractère d'évidence assez prononcé pour satisfaire ; cependant, pour éviter toute occasion de doute, *établissons directement cette continuité pour le cas de* h *négatif.*

Soient x' et x'' deux valeurs de x telles que, eu égard à l'intervalle $x_p - x_i$, l'on ait :

$$x' = x_i + x_p - x''$$

D'où

$$f(x' - h) = f[x_i + x_p - (x'' + h)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

x_i et x_p étant des valeurs déterminées de x doivent dans

$$f[x_i + x_p - (x'' + h)]$$

être regardées comme constantes ; le second membre de c est alors une fonction de x'', dans laquelle *la variation de la variable* x'' *est positive.*

Il est donc clair que si l'on considère les fonctions générales

$$f(x_i + x_p - x) \text{ et } f(x)$$

lorsqu'elles ont une valeur commune, l'équation (c) exprime que les variations subies par la première, par suite d'un accroissement donné à la variable, sont égales à celles subies par la seconde, pour un *décroissement*, égal en grandeur, imposé à la variable.

Mais dans le cas d'une variation positive de x'', on a démontré (n° 110), que l'on a, $\varphi(x'')$ étant une fonction continue et η une quantité tendant avec h vers zéro,

$$\frac{[fx_1 + x_p - (x'' + h)] - f(x_1 + x_p - x'')}{h} = \varphi x'' + \eta$$

Mais

$$x_1 + x_p - (x'' + h) = x' - h$$

et

$$x_1 + x_p - x'' = x'$$

On aura donc

$$\frac{f(x' - h) - fx'}{h} = \varphi [x_1 + x_p - x'] + \eta$$

ou

$$\frac{f(x' - h) - f(x')}{h} = \varphi x' + \eta$$

Et changeant les signes des deux membres, après avoir supprimé l'accent de x :

$$\frac{fx - f(x - h)}{h} = -\varphi(x) - \eta$$

Du reste la continuité de $\varphi(x)$ entraîne celle de $-\varphi(x)$; représentant, pour plus de simplicité cette dernière fonction par Fx et $-\eta$ par ξ, nous aurons

$$\frac{f(x) - f(x - h)}{h} = Fx + \xi$$

112. On a donc, η et ξ convergeant avec h vers zéro :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'x + \eta$$

et

$$\frac{fx - f(x-h)}{h} = \mathrm{F}x + \xi$$

Examinons maintenant *si les fonctions* f'x *et* Fx *sont* ÉGALES, *ou si elles sont* DIFFÉRENTES ; *et déterminons les cas où l'égalité, ou l'inégalité de ces fonctions se présente.*

113. THÉORÈME X. *On a* f'x = Fx *pour l'étendue des subdivisions marquées par les valeurs de* x *correspondantes aux limites qui tendent indéfiniment vers zéro.*

Démonstration. Soient x_1 et x_2 deux valeurs de x comprises dans un des intervalles partiels ; soit de plus

$$h = x_2 - x_1$$

L'équation du rapport ascendant donne, en y faisant $x = x_1$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) + \eta$$

Celle du rapport descendant, où l'on introduit $x = x_2$, fournit :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x - x_1} = \mathrm{F}x_2 + \xi$$

Donc

$$f'x_1 - \mathrm{F}(x_2) = \xi - \eta$$

Mais ξ et η convergent ou peuvent converger tous les deux en même temps que h, vers zéro ; il est donc clair que

$$\xi - \eta$$

a pour limite zéro, et qu'ainsi

$$Fx_2 = f'x$$

114. Théorème. XI. *Réciproquement.*

Toute valeur x_2 *pour laquelle on a*

$$f'x_2 = Fx_2$$

ne peut être l'une des valeurs isolées.

Démonstration. Puisque $f'x_2$ et Fx_2 existent pour x_2, c'est que la convergence existe avant et après cette valeur de x pour un h' limite de grandeur déterminée ; soient x_1 et x_3 les valeurs correspondantes au départ de cette convergence avant et après x_2 ; on aura ascendemment

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(x) + \eta$$

Le rapport descendent est

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = Fx_2 + \xi$$

D'où

$$fx - fx_1 = (x_3 - x_2)(f'x_2 + \eta) + (x_2 - x_1)(Fx_2 + \xi)$$

Mais par les données de la question, on sait que

$$f'x_2 = Fx_2$$

Donc

$$\frac{fx_3 - fx_1}{x_3 - x_1} = f'x_2 + \frac{(x_3 - x_2)\eta + (x_2 - x_1)\xi}{x_3 - x_1}$$

D'ailleurs comme

$$x_2 - x_1 < x_3 - x_1$$
$$x_3 - x_2 < x_3 - x_1$$

et que ξ et η sont des fonctions qui convergent vers zéro, on

peut écrire, en représentant par θ une fraction qui tend vers 1, à mesure que x_1 se rapproche de x_2,

$$\frac{fx_2 - fx_1}{x_2 - x_1} = f'x_2 + \theta\eta$$

Le second membre converge vers $f'x_2$, donc x *croissant continûment de* x_1 *à* x_2 *l'accroissement* $h = x_2 - x_1$, *est toujours ainsi plus grand que* $x_2 - x_1$, *et le rapport des accroissements de la fonction et de la variable converge vers* $f'x_2 = Fx$; et, puisqu'il y a convergence, les valeurs de x correspondantes ne peuvent être des valeurs isolées, *pour lesquelles la convergence n'a pas lieu.*

115. De ce que pour les valeurs de x autres que les valeurs isolées les rapports ascendant et descendant ont même limite, et de ce que cette égalité de limite ne peut appartenir à aucune des valeurs isolées de x, l'on déduit :

THÉORÈME XII. *Les limites* f'x *et* Fx *diffèrent lorsque* x *est une valeur singulière ; il y a donc changement brusque dans le passage de l'une à l'autre.*

116. THÉORÈME XIII. Réciproquement *s'il y a changement brusque de* f'x *à* Fx, *la valeur déterminée de la variable produisant ce changement, est une valeur isolée.*

Démonstration. En effet, s'il n'en était pas ainsi, la valeur de x correspondante serait comprise entre deux valeurs isolées consécutives, et comme telle donnerait

$$f'x = Fx$$

ce qui est contraire à l'énoncé.

On peut donc dire encore sous une autre forme :

Toute valeur de x *pour laquelle les limites des rapports ascendant et descendant sont inégales, est une* VALEUR ISOLÉE *de la variable, dont* x *ne peut s'approcher indéfiniment sans que la limite* h' *de* h *ne converge vers* ZÉRO.

117. On déduit comme remarque faite sur la formule (n° 114),

$$fx_2 - fx_1 = (x_2 - x_1)(f'x_2 + \eta) + (x_2 - x_1)(Fx_2 + \xi)$$

la propriété suivante :

THÉORÈME XIV. *En général et pour une valeur* NON ISOLÉE *de* x, *il est indifférent que l'accroissement de la variable soit considéré comme situé tout entier d'un même côté de cette valeur, ou qu'il se compose de deux parties quelconques, portées l'une en deçà, l'autre au-delà. Dans l'un et dans l'autre cas, la limite du rapport reste le même.*

—

CHAPITRE II.

—

DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

118. Dans ce qui précède nous avons démontré que pour $y=fx$, et lorsque y reçoit une valeur réelle quelconque, l'on a toujours pour un certain intervalle de chaque côté de x, la relation

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Quel que soit donc cet accroissement Δx, en ne dépassant jamais cependant la limite h' de h, *cette équation qui subsiste toujours*, accuse une dépendance mutuelle, réciproque entre Δy et Δx, *dépendance qui persiste jusqu'à l'origine même de ces accroissements.*

119. Pour les fonctions linéaires de la forme

$$y = ax + b$$

le rapport, ou *loi de proportionnalité* qui lie Δy et Δx est évident, puisque l'on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Cette loi est, on le voit, *toujours exprimée par* a *coëfficient de* x.

Pour *une fonction continue non linéaire*, puisque *dès l'origine*, la génération des accroissements Δy et Δx est assujétie à une loi fixe exprimée par

$$\text{Lim.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'x$$

il est clair que cette génération a lieu comme si elle appartenait à une droite dont le coëfficient de x serait $f'x$.

Déterminons dans le cas des fonctions continues NON LINÉAIRES *la loi générale de la génération simultanée* Δy *et* Δx.

Supposons que φx, qui est une fonction continue arbitrairement choisie, exprime cette loi.

x étant quelconque, il y a un certain intervalle où φx est continûment croissant ou continûment décroissant : considérons seulement le cas de la croissance, dont les calculs et les raisonnements s'approprient en toute analogie à celui de la décroissance.

Soit n un nombre entier pouvant devenir aussi grand que l'on veut, et posons, (h étant l'une des n divisions de Δx),

$$\Delta x = nh, \text{ d'où } h = \frac{\Delta x}{n}$$

Aux divisions h successives de Δx répondent des accroissements particuliers liés par l'équation

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \cdots + \Delta y_m + \cdots + \Delta y_n$$

Les limites de l'accroissement quelconque partiel Δy_m (pour l'intervalle h), et entre lesquelles φx est croissant, étant par hypothèse

$$x + (m-1)\,h \text{ et } x + mh$$

Si la génération des accroissements Δy et Δx était constante entre ces limites, il est évident que le rapport

$$\frac{\Delta y_m}{h}$$

qui l'exprime, serait plus grand que celui propre à la fonction

continûment croissante pour la limite inférieure $x + (m-1)h$ de h ; de même ce rapport serait moindre que celui correspondant à la limite supérieure $x + mh$ du même intervalle; on aura donc

$$\Delta y_m > h\,\varphi\,(x + \overline{m-1}\cdot h)$$

$$\Delta y_m < h\,\varphi\,(x + mh)$$

Établissant de semblables relations d'inégalité pour chacun des intervalles partiels dans lesquels a été subdivisé l'accroissement total Δx, il s'en suit :

$$\Delta y > h[\varphi x + \varphi(x+h) + \varphi(x+2h) + \cdots\cdots + \varphi(x+\overline{n-1}.h)]$$

et

$$\Delta y < h[\varphi(x+h) + \varphi(x+2h) + \cdots\cdots + \varphi(x+nh)]$$

La dernière de ces inégalités conduit à :

$$\Delta y < h[\varphi x + \varphi(x+h) + \cdots + \varphi(x+nh)] - h\varphi x$$

ou encore

$$\Delta y < h[\varphi x + \varphi\, x+h) \cdots + \varphi(x+\overline{n-1}.h)] + h\,[\varphi(x+nh) - \varphi x]$$

En représentant par μ une fonction pouvant devenir si petite que l'on veut, l'on aura donc :

$$\Delta y = h[\varphi x + \varphi(x+h) + \cdots + \varphi(x+\overline{n-1}.h)] + \mu h[\varphi(x+nh) - \varphi x]$$

Remplaçant h par sa valeur $\frac{\Delta x}{n}$, il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi x + \varphi(x+h) + \ldots + \varphi(x+\overline{n-1}.h)}{n} + \mu\,\frac{\varphi(x+nh) - \varphi x}{n}$$

n pouvant croître indéfiniment, le terme qui, dans cette relation, contient μ s'approche de plus en plus de *zéro*, et puisque $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite constante, la fraction

$$\frac{\varphi x + \varphi(x+h) \cdots\cdots + \varphi(x+\overline{n-1}\cdot h)}{n}$$

pour la valeur générale et déterminée x de la variable, converge vers $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; mais cette fraction qui est la moyenne arithmétique des valeurs par lesquelles passe continûment φx lorsque la variable croît de x à $x+\Delta x$, converge évidemment *à mesure que* n *croît*, vers une limite que l'on peut représenter d'une manière fort avantageuse par

$$\mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \varphi x$$

On a ainsi

$$\mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \varphi x = \mathrm{Lim.}\ \frac{\varphi x + \varphi(x+h \cdots + \varphi(x+\overline{n-1}\cdot\frac{\Delta x}{n})}{n}$$

n étant illimité, cette équation donne avec exactitude la valeur de $\mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \varphi x$; mais n n'étant pas regardé comme tel, l'erreur sera d'autant plus faible que n sera plus grand ; cette erreur sera toujours moindre que

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi x}{n}$$

On aura donc *en toute rigueur* :

$$\Delta y = \Delta x \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \varphi x$$

Nous démontrerons bientôt que si $f'x$ est la dérivée de fx, l'on a

$$\Delta fx = \Delta x \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} f'x$$

Comme nous pouvons disposer, par hypothèse, de la fonction

φx, identifions-la avec $f'x$, et l'on aura,

$$\Delta y = \Delta \cdot fx$$

On voit aussi que :

Les accroissements Δy *et* Δx *naissent en même temps en ayant entr'eux une raison de proportionnalité continûment variable, et exprimée, pour chaque valeur de* x *par* $f'x$.

120. Considérons la fonction linéaire

$$y = ax + b$$

et celle quelconque $y = fx$

De ce qui précède, l'on conclut ce principe important :

Les accroissements aΔx *et* Δx$\mathrm{M}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}}$ f'x *de ces fonctions pour une même valeur de* x *et par suite de variations identiques de* Δx, *ont même mode de génération simultanée : seulement l'élément* a *qui préside à la génération du premier est* CONSTANT, *tandis qu'il est* VARIABLE *avec* x *dans l'intervalle* Δx *pour celle du second.*

Donc si cette génération qui, pour fx et TRANSITOIREMENT à l'origine x, est identique avec celle relative à $y = ax + b$, devenait PERMANENTE, cette identité se maintiendrait pour l'accroissement entier.

Il y a lieu, on le voit, de distinguer *pour chaque valeur de* x, le développement réel de la loi de génération exprimée par $f'x$, de celui que la loi fournirait si le rapport, qui existe alors que commence la génération des accroissements simultanés Δy et Δx, devenait *permanent.*

Nommons DIFFÉRENTIELLE, l'accroissement de la fonction, envisagée à ce point de vue *permanent* et purement hypothétique; appelons DIFFÉRENCE ORDINAIRE, ou simplement DIFFÉRENCE, l'accroissement effectif de la fonction.

Représentons la différentielle par le signe d, la différence, par le signe Δ.

Une *loi* VARIÉE régit donc le développement de Δy ; une *loi* UNIFORME, celle de dy.

121. THÉORÈME. *L'équation.*

$$dy = \Delta x \cdot f'x$$

exprimant qu'une certaine considération, ou propriété, existe

d'une manière PERMANENTE *pendant le* Δx *et pour chaque valeur de* x, *il est vrai aussi qu'elle existe* TRANSITOIREMENT A L'ORIGINE DE L'ACCROISSEMENT EFFECTIF Δy.

Démonstration. En effet, dire que cette propriété de dy se maintient invariable pendant toute l'étendue de Δx, c'est dire qu'elle est telle à l'origine même de la variation, et comme à cette origine, il y a identité entre le Δy et le dy, il est visible que la propriété avancée a lieu transitoirement à cette même origine.

Ce théorème ressort immédiatement de ce que le mode permanent suivant lequel s'engendre la différentielle dy n'est autre que le mode transitoire suivant lequel commence la génération de la différence Δy.

122. THÉORÈME. *Lorsque l'accroissement continu et incessamment variable de* Δy *est exprimé par* φx, *et si au lieu de varier avec* x *dans l'intervalle* Δx, *le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *conservait la même valeur quelconque* a, *propre à l'origine de* Δx; *c'est-à-dire si l'on a*

$$\Delta y = a \cdot \Delta x$$

et

$$dy = \Delta x \cdot \varphi x$$

Il est vrai que

$$\Delta y = \Delta x \cdot \mathrm{M}_{x}^{x+\Delta x} \varphi x$$

Ce théorème est la conséquence immédiate de l'exposition précédente.

123. Pour saisir toute la portée de l'équation différentielle

$$dy = f'x \cdot \Delta x,$$

il faut remarquer que *le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, comprend deux parties* :

La première, qui est constante et représentée par la dérivée, *donne l'expression de ce rapport, dans l'hypothèse où la loi de génération deviendrait permanente.*

La seconde, qui est variable, tend vers zéro avec Δx.

—

CHAPITRE III.

—

Applications analytiques de l'équation fondamentale.

$$\text{Lim}\ \frac{f(x+h) - fx}{h} = f'x$$

---

124. Les règles particulières de différentiation des fonctions se déduisent avec une simplicité et une élégance remarquables d'une règle unique dont voici l'énoncé :
u *et* v *étant des fonctions de* x, *dont les dérivées respectives sont* u′ *et* v′ *soit*

$$y = \mathrm{F}(u,v)$$

De plus, représentons par $\mathrm{F'_u}$ (u,v) *et* $\mathrm{F'_v}$ (u,v) *les dérivées de* F(u,v), *prises par rapport à* u *ou à* v *comme variable ; on a :*

$$y' = f'x = u'\mathrm{F'_u}\,(u,v) + v'_{\mathrm{v}}\ \mathrm{F'_v}\,(u,v) \quad . \ . \ . \ . \quad \text{(A)}$$

Démonstration. On a

$$\Delta y = \mathrm{F}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \mathrm{F}(u+\Delta u, v) + \mathrm{F}(u+\Delta u, v) - \mathrm{F}(u,v)$$

Mais par définition

$$\mathrm{F}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \mathrm{F}(u+\Delta u, v) = \Delta v[\mathrm{F'_v}\,(u+\Delta u, v) + \alpha]$$
$$\mathrm{F}(u+\Delta u.v) - \mathrm{F}(u,v) = \Delta u\,[\mathrm{F'_u}\,(u,v) + \beta]$$

α et β sont des quantités convergeant vers zéro, avec Δx.

Par addition des deux dernières équations, et en vertu de la première, il viendra :

$$\Delta y = \Delta v[\mathrm{F'_v}\,(u+\Delta u, v) + \alpha] + \Delta u[\mathrm{F'_u}\,(u,v) + \beta]$$

D'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta v}{\Delta x}\left[\mathrm{F'_v}\,(u+\Delta u,v)+\alpha\right]+\frac{\Delta u}{\Delta x}\left[\mathrm{F'_u}\,(u,v)+\beta\right]$$

Mais

$$\mathrm{F'_v}\,(u+\Delta u,v)=\mathrm{F'_v}\,(u,v)+\mathrm{K}\cdot\Delta u$$

Car si dans une fonction de u on donne à la variable l'accroissement Δu, le développement résultant contient d'abord la fonction primitive, plus une série K de termes qui, devant disparaître pour $\Delta u = o$, sont tous multipliés par Δu.

On aura ainsi, par substitution de $\mathrm{F'_v}\,u+\Delta u,v)$, et en remarquant que

$$u'=u+\gamma$$
$$v'=v+\delta$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\theta$$

$$y'+\theta=(v'+\delta)[\mathrm{F'_v}\,(u,v)+\mathrm{K}\cdot\Delta u+\alpha]+(u'+\gamma)[\mathrm{F'_u}\,(u,v)+\beta]$$

Et si l'on fait attention que les quantités α, β, γ, δ, θ convergent toutes vers *zéro* en même temps que Δx, il viendra :

$$y'=v'\mathrm{F'_v}\,(u,v)+u'\mathrm{F'_u}\,(u,v)$$

Règles particulières de dérivation.

125. Corollaire I. *La dérivée d'une fonction de fonction s'obtient en multipliant la dérivée de la fonction principale, prise par rapport à la fonction secondaire jouant le rôle de variable, par la dérivée de la fonction secondaire.*

Cette règle devient évidente si dans (A) l'on pose $v = o$

126. Corollaire II. *La dérivée d'une fonction complexe est la somme des dérivées de la fonction prises successivement par rapport à chacun des éléments variables qui la composent, lorsque tous les autres sont considérés comme constants.*

Ce principe est une très simple extension de celui formulé par A.

127. Corollaire III. *La dérivée d'une somme est la somme des dérivées de chaque terme.*

C'est un cas particulier du corollaire II.

128. Corollaire IV. *La dérivée d'un produit, est la somme des résultats que l'on obtient en substituant successivement à chaque facteur sa propre dérivée.*

C'est aussi un cas particulier du corollaire II.

129. Corollaire V. *La dérivée d'une puissance s'obtient en diminuant l'exposant d'une unité et en introduisant comme facteurs, d'une part l'exposant primitif, d'autre part la dérivée de la quantité soumise à l'exposant.*

1°) Soit :

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

p et q étant entiers et positifs, la fonction peut être regardée comme le produit de p, facteurs égaux à $x^{\frac{1}{q}}$, ce qui permet de dériver en employant le corollaire IV ; on aura ainsi, en représentant par z' la dérivée inconnue de $x^{\frac{1}{q}}$:

$$y' = px^{\frac{p-1}{q}} \cdot z'$$

Comme la valeur de z' ne dépend pas de p, il est permis de supposer $p=q$; et comme alors $y = x$, et que par suite $y' = 1$, il vient :

$$1 = qx^{\frac{q-1}{p}} z'$$

D'où

$$z' = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

La valeur de z' étant ainsi déterminée, l'on obtient :

$$y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

2°) Soit la fonction

$$u = x^{-\frac{p}{q}}$$

Et considérons encore

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

Par multiplication on a :

$$yu = x^{\frac{p}{q}} \cdot x^{-\frac{p}{q}}$$

En dérivant (d'après la règle du n° 128), ce produit qui est égal à 1, il viendra (y' et u' étant les dérivées de y et de u,

$$0 = y'x^{-\frac{p}{q}} + u'x^{\frac{p}{q}}$$

D'où

$$u' = -\frac{p}{q} x^{-\frac{p}{q}-1}$$

Ainsi donc, que l'exposant soit entier fractionnaire, positif ou négatif, on a toujours

$$y = x^m,\ y' = mx^{m-1}$$

130. *Théorème important sur la valeur moyenne de la dérivée.*

L'accroissement de la fonction est égal au produit de l'accroissement de la variable par la valeur MOYENNE *de la fonction dérivée.*

En général on a,

$$\Delta y = \Delta x\,[f'x + \eta]$$

Soit m un nombre entier quelconque, et posons

$$\Delta x = m \cdot h,\ \text{d'où}\ h = \frac{\Delta x}{m}$$

L'équation générale, pour les divers accroissements partiels

$$\Delta y_1 , \Delta y_2 , \Delta y_3 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta y_m$$

de la fonction y, donne :

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= h\,[f'x + \eta_1] \\
\Delta y &= h\,[f'(x+h) + \eta_2] \\
\Delta y_3 &= h\,[f'(x+2h) + \eta_3] \\
&\vdots \\
\Delta y_m &= h[f'(x+m-1\cdot h) + \eta_m]
\end{aligned}$$

Additionnant membre à membre, il vient :

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{m}\left[\sum_0^{m-1} f'(x + ih) + \sum_1^{m} \eta_i\right]$$

m croissant indéfiniment les quantités $\eta_1 , \eta_2 , \eta_3 , \quad . \quad . \quad . \quad \eta_m$ convergent en même temps vers zéro ; d'ailleurs comme l'intervalle Δx peut toujours être choisi tel que $f'x$ soit continu, il est clair que

$$\frac{1}{m}\sum_0^{m-1} f'(x + ih)$$

tend continûment vers une limite déterminée que l'on nomme VALEUR MOYENNE de la dérivée, et que l'on peut représenter avec M. Lamarle, par la notation si simple et si avantageuse

$$\mathrm{M}_{x}^{x+\Delta x} f'x$$

On a ainsi, en général, ξ convergeant vers zéro lorsque m croit indéfiniment :

$$\mathrm{M}_{0}^{x+\Delta x} f'x + \xi = \frac{1}{m}\sum_0^{m-1} f'(x+ih)$$

Et de là on tire

$$\Delta y - \Delta x \, \mathrm{M}_{x}^{x+\Delta x} f'x = \Delta x \left[\xi + \frac{1}{m} \sum_{1}^{m} \gamma_i \right]$$

Le premier membre de cette équation étant constant, il doit en être de même du second qui est alors *nul*, puisque les termes qui le composent décroissent indéfiniment et ne peuvent donner une somme constante différente de zéro.

Il vient donc

$$\Delta y = \Delta x \cdot \mathrm{M}_{x}^{x+\Delta x} f'x$$

131. Si par exemple

$$y = x^{n+1}$$

et que l'on désire déterminer M_{o}^{x}, on remarquera que, pour caractériser l'origine de cet intervalle, il faut faire

$$x = o, \text{ et } \Delta x = x$$

Il s'ensuivrait que

$$\Delta y = x^{n+1}, \text{ d'où } x^{n+1} = x \cdot \mathrm{M}_{o}^{x} (n+1) \, x^{n}$$

ou

$$x^{n+1} = (n+1) \, x \, \mathrm{M}_{o}^{x} x^{n}$$

Donc

$$\mathrm{M}_{o}^{n} x^{n} = \frac{x^{n}}{n+1}$$

132. *Relations générales entre les valeurs moyennes des dérivées successives d'une même fonction ; et détermination de η*

$fx, f'x, f''x, \cdots\cdots$ étant déduites les unes des autres par dérivations, supposons ces fonctions continues entre x et $x + \Delta x = z$

En supposant z quelconque mais *constant*, soit la fontion

$$\varphi x = (z - x)\, f'x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

qui par dérivation, donne

$$\varphi' x = (z - x)\, f''x - f'x$$

Le théorème (130) sur la moyenne de la fonction dérivée, nous apprend ici que

$$\varphi z - \varphi x = (z - x)\ \overset{z}{\mathrm{M}}_{x}[(z-x)f''x - f'x]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Mais si dans l'équation (1), on change x en $x + \Delta x$, le second membre devient nul, donc

$$\varphi z = o$$

Remplaçant ensuite dans (2), φx par sa valeur (1), on obtient après réduction

$$\overset{z}{\mathrm{M}}_{x} f'x = f'x + \overset{z}{\mathrm{M}}_{x}(z - x)\, f''x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Pour avoir la relation entre les moyennes relatives à deux dérivées successives quelconques, si au lieu de considérer l'équation (1) de condition déterminant φx, l'on pose

$$\varphi x = (z - x)^{n} f^{n} x$$

$f'x$ aurait évidemment pour valeur

$$f'x = (z - x)^{n-1} f^{n} x$$

D'où

$$f'' x = (z - x)^{n-1}\, f^{n+1} x - (n - 1)(z - x)^{n-2} f^{n} x$$

Et l'équation (3) devient alors :

$$\overset{z}{\underset{x}{M}}(z-x)^{n-1} f^n x = (z-x)^{n-1} f^n x + \overset{z}{\underset{x}{M}}(z-x)[(z-x)^{n-1} f^{n+1}x - (n-1)(z-x)^{n-2} f^n x]$$

D'où

$$\overset{z}{\underset{x}{M}}(z-x)^{n-1} f^n x = (z-x)^{n-1} f^n x + \overset{z}{\underset{x}{M}}(z-x)^n f^{n+1} x \quad . \quad . \quad (4)$$

Dans cette équation (4), faisant successivement $n=1,2,3,\ldots n$, et additionnant membre à membre les relations résultantes, on obtient :

$$(5)\ldots \overset{z}{\underset{x}{M}} f'x = f'x + \frac{z-x}{2} f''x + \frac{(z-x)^2}{2\cdot 3} f'''x + \cdots + \frac{(z-x)^{n-1}}{2.3..n} f^n x + \frac{1}{1.2\ldots n} \overset{z}{\underset{x}{M}}(z-x)^n f^{n+1} x$$

Cette formule est fondamentale.

133. *Détermination de la quantité η de l'équation*

$$\Delta y = \Delta x\ [f'x + \eta]$$

Nous avons trouvé

$$\Delta y = \Delta x \overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}} f'x$$

Dans cette équation, si l'on substitue la valeur de $\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}} f'x$, fournie par l'équation (3) du n° 132, on aura :

$$\Delta y = \Delta x\ [f'x + \overset{z}{\underset{x}{M}}(z-x) f''x]$$

Mais

$$\Delta y = \Delta x\ (f'x + \eta)$$

Donc

$$\eta = \overset{z}{\underset{x}{M}}(z-x) f''x$$

Cette relation *si remarquable* donne la *composition* de η, c'est-à-dire de la quantité qui converge vers zéro avec Δx, dans l'équation générale de la variation.

134. *Développement des fonctions.*

Théorème *fondamental.*

fx, f'x, f''x.....f^n*x, x étant continues entre les limites* x *et* $x + \Delta x = z$, *on a*

$$fz = fx + \frac{z-x}{1} f'x + \frac{(z-x)}{1\cdot 2} f''x + \quad . \quad . \quad .

Or (n° 130),

$$\Delta f(x+\Delta x) = \Delta x \overset{z}{\underset{x}{M}} f'(x+\Delta x)$$

$$-\Delta fx = -\Delta x \overset{z}{\underset{x}{M}} f'x$$

L'addition membre à membre des trois dernières égalités donne :

$$\Delta^2 y = \Delta x \overset{z}{\underset{x}{M}} [f'(x+\Delta x) - f'x]$$

ou

$$\Delta^2 y = \Delta x \overset{z}{\underset{x}{M}} \Delta f'x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (v)$$

Mais

$$\Delta y = \Delta x . \overset{z}{\underset{x}{M}} f'x$$

D'où, puisque Δx est constant pour toute l'étendue de la dérivation,

$$\Delta^2 y = \Delta x \cdot \Delta \overset{z}{\underset{x}{M}} f'x. \quad . \quad . \quad . \quad (v')$$

La combinaison des équations (v) et (v') fournit :

$$\Delta \overset{z}{\underset{x}{M}} f'x = \overset{z}{\underset{x}{M}} \Delta f'x$$

Cette relation établit le théorème à démontrer.

136. *Des moyennes multiples*

Théorème. *La différence de l'ordre* n *d'une fonction est égale au produit de la puissance* $n^{ième}$ *de l'accroissement de la variable par la moyenne multiple* $\overset{u}{M}$ *de la dérivée du même ordre.*

De même que

$$\Delta fx = \Delta x \cdot \overset{z}{\underset{x}{M}} f'x$$

l'on a

$$\Delta f'x = \Delta x \overset{z}{\underset{x}{M}} f''x .$$

L'équation (*v*) n° 155 devient ainsi :

$$\Delta^2 y = \Delta x^2 \overset{z}{\underset{x}{\mathrm{M}}} \overset{z}{\underset{x}{\mathrm{M}}} f'x$$

On aurait de la même manière

$$\Delta^3 y = \overline{\Delta x}^3 \overset{z}{\underset{x}{\mathrm{M}}} \overset{z}{\underset{x}{\mathrm{M}}} \overset{z}{\underset{x}{\mathrm{M}}} f''x$$

Représentant ces moyennes multiples par la lettre M au-dessus de laquelle se trouve placé le degré de multiplicité, il viendra

$$\Delta^2 y = \overline{\Delta x}^2 \overset{2}{\underset{x}{\mathrm{M}}}{}^z f''x$$

$$\Delta^3 y = \overline{\Delta x}^3 \overset{3}{\underset{x}{\mathrm{M}}}{}^z f'''x$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n y = \Delta x^n \overset{n}{\underset{x}{\mathrm{M}}}{}^z f^{(n)}x$$

157. *Corollaire.* Si $f^{(n)}$ est une constante C on a

$$\overset{1}{\mathrm{M}} f^{(n)}x = \overset{2}{\mathrm{M}} f^{(n)}x = \overset{3}{\mathrm{M}} f^{(n)}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \overset{n}{\mathrm{M}} f^{(n)}x = f^{(n)}x = \mathrm{C}$$

Donc

$$\Delta^n y = \mathrm{C} \cdot \overline{\Delta x}^n$$

Et plus généralement

$$\Delta^n y = \overline{\Delta x}^n \left[f^{(n)}x + \xi \right]$$

ξ étant une quantité qui converge vers zéro, en même temps que Δx

CHAPITRE IV.

—

DE LA PUISSANCE QU'ACQUIERT L'ANALYSE TRANSCENDANTE PAR L'EXACTE DÉFINITION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

—

138. Nous avons vu que le second membre de l'équation différentielle

$$\Delta y = \Delta x\,[f'x + \eta]$$

se compose de deux termes l'un $\Delta x \cdot f'x$, l'autre qui décroit indéfiniment avec Δx.

Le premier de ces deux termes, considéré en lui-même, peut être appelé *différentielle*, et se représente par la caractéristique d, de sorte que

$$dy = \Delta x \cdot f'x.$$

L'un de ses facteurs est constant pour tout l'intervalle Δx et pour une même valeur de x

Envisagée et bien comprise sous ce point de vue, *la différentielle est une quantité* FINIE, *susceptible d'accroissement et de décroissement indéfini.*

Comme *quantité* FINIE la différentielle obéira donc aux règles ordinaires du calcul des quantités finies.

Pour les *fonctions linéaires* η est nul, avons-nous vu, quels que soient x et Δx ; alors on a

$$\Delta y = dy$$

Pour les fonctions non linéaires, η n'est nul que pour certaines valeurs de x que l'on appelle *valeurs isolées* ayant entr'elles des écarts déterminés ; et pour toute valeur particulière

de la variable, différentes de ces valeurs isolées, la différence Δy et la différentielle dy sont toujours deux quantités bien distinctes.

La différentielle considérée à ce point de vue purement et exclusivement algébrique est, quoique exacte, une notion insuffisante par suite des difficultés que l'on rencontre dans les applications : il faut, pour s'affranchir de cet inconvénient, donner à l'équation différentielle la signification véritable et complète que nous avons développée plus haut et que nous résumons comme suit :

Pour une fonction continue, mais non linéaire, une loi déterminée régit les variations des accroissements Δy et Δx dépendant l'un de l'autre ; cette loi qui persiste, même à l'origine de ces accroissements, et qui préside ainsi à leur génération simultanée, reçoit, pour ce motif, le nom de *loi de génération*, cette loi change à chaque instant, et l'on ne pourrait admettre que, pendant un certain intervalle Δx quelque petit qu'on voulut d'ailleurs le supposer, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit constant, puisque nous avons démontré au commencement de ce travail, qu'il faudrait pour cela que la fonction fût linéaire.

Cependant rien n'empêche de concevoir, hypothétiquement bien entendu, et pour la valeur choisie de x, une autre fonction de la même variable, dont le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ CONSTANT ET INVARIABLE, soit précisément égal à celui qu'assigne pour *la fonction donnée continue et non linéaire*, la loi de génération appliquée à l'origine x des accroissements ; on a alors en représentant Δx, par dy, l'équation

$$dy = \Delta x \cdot f'x$$

Bien plus, *et sans créer* EXPLICITEMENT cette seconde fonction, il est incontestable que l'on peut supposer que la loi de génération qui, pour fx varie sans cesse, persiste dans la détermination particulière qu'elle affecte à l'origine même des accroissements.

La différentielle dy est alors devenue une vraie différence Δy et elle se trouve avoir pour expression la limite vers laquelle converge le second membre de l'équation générale.

$$\Delta y = \Delta x [f'x + \eta],$$

lorsque Δx décroit indéfiniment.

En un mot supposez que pour la valeur de x, la loi de génération, au lieu de varier constamment, persiste dans sa valeur actuelle, et vous obtiendrez la différentielle.

139. Ainsi définie la différentielle se prête avec une admirable simplicité à toutes les applications possibles : quelques exemples viendront bientôt établir sans contestation cette supériorité pratique du concept nouveau sur les conceptions anciennes.

La raison de cette supériorité est du reste frappante : elle consiste en ce que la méthode de M. Lamarle permet immédiatement sans hypothèses particulières, sans cesse renaissantes et nouvelles, le passage de l'abstrait au concret, et cela parce qu'elle a étudié les diverses phases sous lesquelles peut se présenter le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et le Δy ; parce qu'elle a établi et fait nettement saisir quelles sont les deux parties bien distinctes, dont se compose le Δy, ainsi que le rôle de chacune de ces parties.

Et c'est précisément à l'ignorance de la connaissance intime et réelle de Δy, que l'on doit attribuer les longueurs et l'insuffisance des anciennes conceptions.

140. La traduction en langage ordinaire de la condition exprimée analytiquement par l'équation différentielle se fait toujours immédiatement.

Dans l'étude des phénomènes soumis à la variation continue de certaines quantités, l'équation différentielle exprime ce qui se passe si l'on suppose que les grandeurs qui, jusqu'à un moment donné, ont été variables, deviennent subitement permanentes ; et c'est là une hypothèse très-simple et qu'il est toujours permis de faire.

141. Du reste pour apercevoir dans tout son jour la puissance qu'acquiert l'analyse transcendante, coordonnée par la conception de M. Lamarle, il suffit de se demander *d'où naissent les difficultés auxquelles s'appliquent les calculs transcendants ?*

Ces difficultés proviennent de ce que certaines quantités ou grandeurs qui doivent être introduites dans le calcul varient incessamment ; et il n'est pas contestable que la question, dans la solution de laquelle elles entrent, deviendrait bien moins difficile si, pour une valeur donnée de la variable, les grandeurs considérées persistent dans l'état où elles se trouvent.

Dès lors, si le problème ainsi simplifié, est résolu d'une manière complète, ou même convenable au but proposé, et si l'on

veut passer au cas des mêmes grandeurs considérées comme variables continûment, (cas du problème donné), il suffira de changer les différences ordinaires en différentielles correspondantes.

On obtient ainsi l'équation du problème général proposé.

Or, la conception de M. Lamarle *a* SEULE le privilége de distinguer les parties variables et constantes de l'équation fondamentale.

$$\Delta y = \Delta x\,[f'x + \eta]$$

Elle seule donc, *à l'exclusion de toutes les autres*, saisissant le fait hypothétique de la permanence, s'applique *immédiatement et sans intermédiaire* à la mise en équation de toute espèce de question.

142. *Mode d'application de la méthode de M. Lamarle aux questions géométriques.*

Voyons d'abord comment l'équation différentielle

$$dy = \Delta x \cdot f'x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

caractérise la nature intime et générale de la courbe.

On peut toujours supposer que

$$y = fx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

est l'équation d'une certaine courbe, et quoique $f'x$ est constant pendant tout l'intervalle Δx, le lieu géométrique de (α) est une ligne droite.

D'ailleurs, ainsi que cela a été établi dans l'exposé général de la méthode, comme le rapport $\frac{y}{\Delta x}$ est *transitoirement* le même à l'origine x pour la fonction continue, il est évident que le déplacement initial du point générateur a lieu suivant la droite (α) : en tout point de la courbe, on pourra répéter la même chose.

C'est la droite (z) qui détermine la direction suivant laquelle commence le déplacement du point générateur ; cette droite est appelée *tangente, et c'est suivant elle que s'établit et se manifeste la continuité.*

Telle est donc la définition nouvelle de la tangente aux courbes,

et il est à remarquer que les méthodes des limites et des dérivations, qui sont incapables d'indiquer le lieu de dépendance entre une courbe et sa tangente, ne donnent que des définitions *physiques* (ou *visibles* s'il m'est permis de m'exprimer ainsi), définitions dont le premier inconvénient est d'établir *un rapport exagéré et faux* entre la génération de la courbe et celle de la tangente.

143. *Plan tangent.* — Si l'on considère la surface

$$u = o$$

et le point quelconque

$$x_o\ ,\ y_o\ ,\ z_o$$

de cette surface, il est clair que le lieu géométrique des directions suivant lesquelles la continuité s'établit dans tous les sens sur la surface autour de ce point, reste le même lorsque dans $u = o$, on se déplace autour du point $(x_o,\ y_o,\ z_o)$, *dans une direction quelconque du reste*, d'une quantité moindre que l'intervalle pour lequel la convergence *vers une limite déterminée quelconque* a lieu. Ce lieu sera donc aussi celui que l'on aura pour le point

$$(x_o + \Delta x_o,\ y_o + \Delta y_o,\ +\ \Delta y_o,\ z_o + \Delta z_o)$$

On a ainsi pour équation

$$\frac{du_o}{\Delta x_o}\,dx + \frac{du}{\Delta y_o}\,dy + \frac{du}{\Delta z_o}\,dz = o$$

ou bien

$$(x - x_o)\,\frac{du}{\Delta x_o} + (y - y_o)\,\frac{du}{\Delta y_o} + (z - z_o)\,\frac{du}{\Delta z_o} = o$$

Cette équation, qui est celle d'un plan démontre ce théorème :

Le lieu géométrique des tangentes aux diverses courbes que l'on peut tracer par un point sur une surface, est un PLAN *qui pour ce motif est appelé* PLAN TANGENT *en ce point à cette surface.*

144. Est-il besoin de faire ressortir la supériorité de la mé-

thode nouvelle dans les questions de tangentes et de plans tangents.

A la rigueur même, aucun développement n'est nécessaire pour arriver à l'équation de la tangente et à celle du plan tangent ; le principe de *continuité*, considéré dans sa vaste étendue, *dit* TOUT ; il ne s'agit que d'en saisir la signification, propre au cas qui se présente.

La continuité régit toute la conception de M. Lamarle : il n'est donc pas étonnant qu'elle soit un *levier* IMMÉDIAT si puissant et si prompt dans les applications ?

CHAPITRE V.

QUELQUES EXEMPLES TRAITÉS PAR CHACUNE DES MÉTHODES EXPOSÉES PRÉCÉDEMMENT.

---

145. Nous venons de voir, par deux exemples bien simples, avec quelle facilité et presque sans calculs, la conception de M. Lamarle résout les questions relatives à la tangente et au plan tangent.

Choisissons quelques exemples principaux et généraux pour achever de mettre en évidence *la puissante et avantageuse faculté pratique* de la méthode nouvelle.

Premier exemple. — *Différentielle d'un arc de courbe.*

146. *Méthode de M. Lamarle.* Soit, pour plus de concision, la courbe plane

$$y=fx.$$

Le raisonnement ne serait ni plus ni moins simple pour une courbe quelconque. En supposant les axes rectangulaires considérons un point (x,y), ainsi que la tangente en ce point.

Si en (x, y) la loi de génération, à laquelle est sou-

mise la courbe, loi en vertu de laquelle la direction tangentielle *varie continûment*, si cette loi est regardée comme *permanente*, c'est-à-dire si l'on admet que cette loi persiste dans la détermination qu'elle affecte en (x,y), la génération linéaire tangentielle s'opère par le point décrivant de la même manière que pour le parcours curviligne réel, correspondant à la loi génératrice proposée (toujours dans les limites de la convergence vers la fonction prime de la nouvelle grandeur étudiée). D'ailleurs, et en un mot, c'est suivant la tangente que s'opère à chaque instant le déplacement du point décrivant, et le changement de Δ en d considère ce qui se passe sur la tangente, au lieu de ce qui se passe sur la courbe.

On aura donc immédiatement et en toute rigueur,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

147. *Méthode infinitésimale.*

Cette conception donne aussi la même égalité, sans calculs intermédiaires, ni préparation ; seulement le dx et le dy appartiennent chez elle à la courbe, tandis que dans la conception de M. Lamarle, ces mêmes éléments sont comptés sur la tangente.

De cette façon la méthode infinitésimale considère la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés ; et ce point de vue complètement faux a été suffisamment réfuté dans ce qui précède.

148. *Méthode des limites.*

Soit encore la courbe.

$$y = fx$$

En prenant (fig. 10), $\Delta x = \mathrm{DP}$ assez petit, on peut toujours faire en sorte que l'arc Δs soit convexe ou concave dans toute son étendue.

On aura donc

$$\Delta s > \mathrm{BM}$$
$$\Delta s < \mathrm{AM} + \mathrm{AB}$$

Les valeurs de BM, AM, et AB, sont évidemment les suivantes :

$$\overline{\mathrm{BM}}^2 = \overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2$$

$$AM = \frac{CM}{\cos AMC} = \Delta x \sqrt{1 + f'^2 x}$$

$$AB = AC - BC = \Delta x \cdot f'x - \Delta y$$

Il viendra donc

$$\Delta s > \sqrt{\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2}$$

et

$$\Delta s < \Delta x \sqrt{1 + f'^2 x} + \Delta x \cdot f'x - \Delta y$$

D'où

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{1 + f'^2 x} + f'x - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En passant à la limite, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ converge vers $f'x$, et par suite puisque les limites des seconds membres de ces expressions sont égales entr'elles, on aura :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2 x}$$

Il est utile je pense de rien ajouter pour décider combien cette méthode est longue et pénible comparativement à celle de M. Lamarle.

149. *Méthode dérivée de Lagrange.*

Soit (fig. 11) un arc de courbe AB dont A et B sont les extrémités ; en A et B menant les tangentes AS et BT, soit M le point d'intersection de ces tangentes.

On aura évidemment.

$$\overset{\frown}{AB} < AM + BM$$

Cela posé, je dis que

$$\overset{\frown}{AB} > BT$$

$$\overset{\frown}{AB} < AS$$

En effet, tirons la corde AB ; comme le $\Delta x = A'B'$ est laissé *quelconque*, il *peut* toujours être choisi de telle manière que les angles SAT et BTA soient inégaux, et que des compléments inégaux de ces angles, l'un d'eux soit plus petit que le complément de l'angle que fait la corde avec l'axe des X. Dès lors la corde AB sera comprise entre les longueurs des tangentes BT et AS.

Remarquons d'ailleurs que de l'hypothèse

$$\widehat{BTA} > \widehat{SAT}$$

il résulte immédiatement

$$AM > MT$$

et

$$MS > BM$$

D'où

$$AM + MS > AM + BM$$

Et à fortiori

$$AS > \widehat{AB}$$

Actuellement soit

$$y = fx$$

l'équation de la courbe, et (x,y) les coordonnées du point A ; soit de plus $A'B' = i$, et l'on aura :

$$\text{tang. } \widehat{SAQ} = f'x$$

$$\text{tang. } \widehat{T_1BQ_1} = f'(x+i)$$

et

$$SQ = i \cdot f'x$$
$$TV = i \cdot f'(x+i)$$

il viendra par conséquent

$$AS = \sqrt{i^2 + i^2 f'^2 x} = i\sqrt{1 + f'^2 x}$$

$$BT = \sqrt{i^2 + i^2 f'^2 (x+i)} = i\sqrt{1 + f'^2 (x+i)}$$

Pour abréger posons

$$\varphi x = \sqrt{1 + f'^2 x}$$

et par suite

$$AS = i \cdot \varphi x$$
$$BT = i \cdot \varphi (x+i)$$

Représentons par Fx, la fonction de x qui exprime la longueur de l'arc, il faudra que simultanément Fx satisfasse aux deux conditions :

$$F(x+i) - Fx > i \cdot \varphi x$$
$$F(x+i) - Fx < i \cdot \varphi (x+i)$$

D'où en développant, et divisant par i les deux membres de chaque développement

$$F'x + \frac{1}{2} F''x + \text{etc.} \cdots > \varphi x$$

$$F'x + \frac{i}{2} F''x + \text{etc.} \ldots < \varphi x + i \cdot \varphi' x + \frac{i^2}{2} \varphi'' x + \text{etc.} \ldots$$

Ces développements existant pour quelque degré de petitesse que l'on attribue à i, posons $i = o$, et l'on aura :

$$F'x > \varphi x$$
$$F'x < \varphi x$$

D'où

$$F'x = \varphi x.$$

On devra donc rechercher Fx, ou la fonction primitive de φx c'est-à-dire de $\sqrt{1 + f'^2 x}$.

Si $\frac{ds}{dx}$ représente la dérivée de Fx, ou $F'x$, il viendra

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

150. Cette longue démonstration, cette longue *recherche* de Lagrange, est bien de nature à propos d'une question si simple à faire ressortir *la grande inaptitude pratique de la méthode des dérivées.*

Et encore à quoi aboutit ce calcul si long, si pénible, bien que très remarquable en lui-même? Il donne une relation numérique et n'indique *rien* quant à la génération de l'arc.

Il devait du reste en être ainsi, et nous l'avons déjà dit ailleurs :

La conception de Lagrange est purement analytique, numérique ; elle est, dès son origine, frappée de stérilité puisqu'elle ne renferme rien qui puisse permettre de passer *directement* de l'abstrait au concret.

151. *Méthode fluxionnelle.*

Soit un arc convexe par rapport à l'axe des X : les x fluant uniformément *les coordonnées croîtront d'un mouvement accéléré*, puisque sans cela le lieu décrit serait une ligne droite.

Considérons (fig. 12) le point M et la tangente DMC à la courbe en ce point. En vertu de l'accélération du mouvement des ordonnées, il est clair que si l'abscisse de M *a flué* de M'A', et que si l'ordonné eut obéi à un mouvement uniforme au lieu d'être soumise à son accélération, elle eut flué d'une quantité plus petite que AP, mais plus grande que BQ.

Je dis que CP *est la quantité dont se serait alors accru l'ordonnée* MM'.

Pour établir ce point supposons que

1° L'accroissement de MM' soit PF dans le cas de l'uniformité du mouvement considéré *hypothétiquement* pour MM'.

Traçons MF qui rencontre la courbe en un point G ayant H pour projection sur OK ; on a

$$\frac{PF}{GR}=\frac{M'A'}{M'G'}$$

Il résulte de là que si la génération de l'ordonnée était uniforme, *l'ordonnée* MM' *s'accroîtrait de* GR *en même temps que l'abscisse s'accroîtrait de* M'G', c'est-à-dire que GR et M'G' seraient des accroissements simultanés relatifs à des mouvements uniformes ; et *c'est* précisément *cette conséquence qui est impossible*, puisque le point G appartenant à la courbe, l'ordonnée MM' à laquelle serait pour un instant attribué une génération uniforme devrait fluer d'une quantité plus petite que GR.

L'hypothèse est donc inadmissible.

2° L'accroissement de MM' dans le cas de l'uniformité de la génération de l'ordonnée, est supposé, après avoir pris M'B' = M'A',

$$\begin{matrix} QK > BQ \\ QK < CP \end{matrix}$$

Joignons les points M et K par une ligne droite qui rencontre la courbe en V, dont la projection sur l'axe de X est le point V' ; on aura

$$\frac{QK}{VS} = \frac{B'M'}{VM}$$

Les parallèles VV_1 et KK_1 à OX, donnent

$$\frac{MK_1}{MV_1} = \frac{B'M'}{M'V'}$$

C'est-à-dire que si la génération de l'ordonnée était uniforme, l'ordonnée VV' s'accroîtrait de MV_1 dans le même temps que l'abscisse fluerait de V'M', chose impossible puisque V étant un point de la courbe, la fluxion réelle de son ordonnée doit être plus grande que celle relative à cette grandeur douée, comme il vient d'être supposé, d'un mouvement uniforme.

La seconde hypothèse est donc aussi inadmissible, et l'on peut ainsi regarder comme démontré que la fluxion de l'ordonnée MM', pour l'accroissement M'A' de l'abscisse, est CP dans le cas d'un mouvement uniforme attribué à cette ordonnée ; de manière que AC est, pour l'accroissement réel, la partie SPÉCIALEMENT due à l'accélération du mouvement.

Désignant par dx, dy et ds les accroissements de x, y et s, dans l'hypothèse de leur génération par mouvement uniforme, c'est-à-dire représentant par dx, dy et ds les quantités M'A', CP et CM de la figure, on trouve

$$\overline{ds}^2 = \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2$$

152. *Remarque*. Cette recherche par la méthode fluxionnelle est bien longue, il est vrai ; mais *elle a le mérite d'indiquer le sens précis* qui doit être attaché à l'équation que l'on vient d'obtenir, par suite de la détermination *de la quantité qui*, dans la fluxion de l'ordonnée *est due à l'accélération du mouvement.*

On saisit immédiatement un lien de dépendance, une similitude d'origine pour ainsi dire, entre cette méthode de Newton, et celle de M. Lamarle. Newton avait compris la puissance et le mode général des applications du calcul différentiel ; mais ses conceptions abstraites n'avaient pas pour base l'étude de la permanence de la génération analytique : de là l'insuffisance et l'infériorité de la méthode des fluxions.

—

2e Exemple. — *Du Cercle Osculateur.*

—

153. *Méthode de M. Lamarle.*

Nous avons vu que la tangente est le type sensible de la courbure, et que c'est suivant cette droite que la continuité se manifeste.

La *courbure* résulte de la variation incessante de la direction de la tangente. Si l'on désigne par α l'angle qu'une tangente à la courbe $y = fx$ fait avec l'axe des X, on a vu que

$$\text{tang. } \alpha = f'x$$

D'où

$$\alpha = \text{arc-tang. } f'x$$

et

$$d\alpha = \frac{f''x}{1+f'^2x} \cdot \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Soit Δs l'élément de l'arc décrit, et ds l'accroissement tangentiel correspondant, on a

$$ds = \Delta x \sqrt{1+f'^2x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Par division les relations (1) et (2) fournissent,

$$\frac{ds}{ds} = \frac{f''x}{[1+f'^2x]^{\frac{3}{2}}}$$

Telle est l'équation qui lie les variations dues à la continuité et à la courbure.

Actuellement supposons qu'à l'origine x des accroissements, le rapport $\frac{d\alpha}{ds}$ persiste dans la détermination acquise, c'est-à-dire assujétissons ce rapport à conserver cette valeur qui devient ainsi permanente : alors les $d\alpha$ et ds deviennent les $\Delta\alpha$ et Δs, et l'on a :

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{f''x}{(1+f'^2x)^{\frac{3}{2}}}$$

L'uniformité se manifeste dès cet instant dans la courbe, puisque le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ (qui la détermine) est *constant* ; et remarquons bien que l'hypothèse de *permanence* dans laquelle nous nous plaçons ici n'apporte aucune modification à la courbure au point considéré comme origine, puisque, en vertu de cette hypothèse, cette courbure est maintenue dans la détermination qui lui était propre en ce point.

Posons

$$\rho = \frac{[1+f'^2x]^{\frac{3}{2}}}{f''x}$$

Et l'on aura :

$$\frac{\Delta s}{\Delta \alpha} = \varrho \ , \ \text{d'où} \ \frac{1}{\Delta \alpha} = \frac{\varrho}{\Delta s}$$

Or, puisque $\Delta\alpha$ désigne l'accroissement angulaire et qu'il est ainsi mesuré par un arc de cercle dont le rayon est 1, cette dernière égalité signifie que la courbe

$$\Delta s = \varrho \cdot \Delta \alpha$$

est une circonférence dont ϱ est le rayon.

Le cercle, ainsi défini, est appelé Cercle Osculateur.

Considéré sous ce point de vue, le cercle osculateur a une signification bien nette, et forme un des caractères principaux de la courbe pour marquer que le changement de direction, *saisi à l'origine même de la variation*, se manifeste de la même façon qu'en un point quelconque de ce cercle.

Rappelons en passant que le rapport $\frac{1}{\varrho}$, ou l'inverse du rayon d'un cercle, sert de mesure à la courbure de ce cercle.

Nous ne nous arrêterons pas à la détermination des coordonnées du centre de courbure ; c'est là une simple question d'élimination.

154. Il n'est pas sans importance, croyons nous, de remarquer que le cercle osculateur déterminé comme nous venons de le présenter, *reste indépendant* de la théorie générale des courbes planes osculatrices ; quelques mots, qu'il serait complétement superflu d'introduire ici, raccorderaient à cette théorie l'exposition nouvelle qui vient d'être faite.

155. *Méthode infinitésimale.*

Cette méthode suppose qu'à partir du point considéré M (fig. 15), et avec d'autant plus d'exactitude que l'on prend plus petit le $d\alpha$, (ou l'angle de deux normales infiniment voisines), l'on peut regarder le ds, *compté sur la courbe* comme perpendiculaire à la normale ϱ de M ; alors on aura :

$$\varrho = ds \cdot \frac{1}{\text{tang } d\alpha}$$

D'où par approximation, en s'appuyant sur la petitesse de $d\alpha$,

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

On *considère par* ANALOGIE, et comme une espèce de limite qui ne serait jamais atteinte, au point de vue des considérations infinitésimales, le rapport $\frac{ds}{d\alpha}$ comme mesurant la courbure de la courbe au point M.

Il reste à déterminer le point O.

Pour cela désignons la courbe par

$$y = fx$$

par α et β les coordonnées courantes de la normale au point quelconque (x,y). L'équation de la normale en ce point est

$$\alpha - x + (\beta - y)f'x = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour passer à la normale infiniment voisine, il suffit de changer dans cette équation x en $x + dx$, y en $y + dy$, et l'on obtient ainsi après les réductions que permet l'équation précédente,

$$-dx + (\beta - y)[dx \cdot f''x + \frac{dx^2}{1 \cdot 2} f'x + \alpha \ldots] - dy[f''x + dx.f''x + \alpha.] = o$$

Divisant par $-dx$, et négligeant toutes les quantités infiniment petites, on obtient :

$$\beta - y = \frac{1 + f'^2 x}{f''x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Substitution faite dans (1), on tire :

$$\alpha - x = -\frac{f'x}{f''x}(1 + f'^2 x) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ensuite comme ρ est la distance des points (x,y) et (α,β), on aura pour valeur du rayon de courbure :

$$\rho = \frac{[1+f''^2x]^{\frac{3}{2}}}{f''x}$$

156. En représentant par α l'angle que la tangente en M fait avec l'axe des X, et observant que $d\alpha$ est l'angle compris entre les deux normales consécutives, on eut pu poser plus simplement

$$ds = \rho . d\alpha$$

ou

$$dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \rho d.(\text{arc tang.} = \frac{dy}{dx})$$

d'où

$$dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \rho \frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Et enfin

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

157. En admettant même que la méthode infinitésimale s'appuie sur la théorie osculatrice pour dire que le centre de courbure est l'intersection de deux normales consécutives, il serait encore indispensable de prouver AUTREMENT *que par des à peu près*, ou *des avec d'autant plus d'exactitude*, que l'*arc appelé* par elle, *sans jamais pouvoir être établi comme tel*, ÉLÉMENT du cercle osculateur, se confond avec l'élément de la courbe au point M.

Le calcul des infinis n'a qu'une seule raison à donner, et c'est que la courbe ou la circonférence, choisie comme osculatrice, est telle qu'elle a même tangente que la courbe au point considéré, et c'est ce qui n'autorise nullement à dire que la courbure en ce point est la même pour la circonférence et la courbe ; car si en

ce point, comme le dit ce *calcul*, il y a un *élément arcuel* commun, *qu'est-ce que cet élément* ?

D'ailleurs pourquoi le triangle MM'O est-il rectangle en M ?

Au point de vue géométrique, le calcul infinitésimal est donc *incapable* de rendre compte de la nature du cercle osculateur ; et ce n'est pas par suite d'approximations, que la formule

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

se détermine ; c'est en *toute rigueur*.

Au point de vue analytique, et quant à la détermination de ρ, nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit en général des principes du calcul infinitésimal ; et ce n'est pas non plus par approximation que l'on a

$$\rho = \frac{(1 + f'^2 x)^{\frac{3}{2}}}{f''x}$$

mais c'est encore avec *la plus absolue rigueur*.

158. Il nous paraît indispensable d'avertir que l'exposé infinitésimal qui vient d'être fait relativement à ρ, est une modification du calcul de Leibnitz.

Présentons succinctement cette théorie au début de notre analyse transcendante.

On sait que par trois points donnés dans un plan on peut toujours faire passer une circonférence ; si l'on suppose en outre que ces trois points appartiennent à une courbe quelconque et qu'ils soient infiniment voisins les uns des autres, la courbe aura un arc infiniment petit commun avec la circonférence et par conséquent *sa courbure* sera dans cet arc la même que celle de la circonférence.

On considère alors un fil flexible, infiniment délié entourant la courbe, et s'en détachant à partir de l'une des extrémités en lui restant toujours tangent ; l'extrémité libre de ce fil décrira une courbe qui est appelée la *développée* de la courbe donnée (nommée alors par opposition la *développante*).

Les rayons des arcs de cercle ainsi décrits portent le nom de *rayons de courbure*, et le cercle lui-même, celui de *cercle osculateur*.

Soit donc (fig. 14), VV′ une courbe quelconque dont l'équation est

$$y = f(x)$$

Soit un point A (x,y) de cette courbe, et dont l'abscisse est OP ; supposons PQ = PR, et considérons PQ comme la *différence* de OP ; nous aurons pour les points correspondants B et C de la circonférence :

$$AD = \Delta \cdot BQ$$

$$CP = \Delta \cdot CR$$

$$CS = \Delta \cdot CR - \Delta . BQ = \Delta^2 BQ$$

Si les trois points A,B,C sont infiniment voisins, PQ est infiniment petit et l'on a :

$$AD = dy,\ PQ = dx,\ CS = d^2y$$

Et puisque, d'après la définition infinitésimale, le cercle osculateur doit avoir les trois points A,B,C situés sur la courbe, nous aurons en désignant par α et β les coordonnées inconnues du centre de courbure, et par ϱ le rayon osculateur

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \varrho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dans cette équation x' et y' représentent les coordonnées courantes du cercle.

A cause de l'élément commun entre la courbe et le cercle osculateur (au point x,y), il faudra que les valeurs de y', dy' et d^2y' soient respectivement égales à celles de y, dy et d^2y relatives à $y = fx$, ce qui exige que l'on déduise par deux différentiations successives :

$$(x' - \alpha)\, dx' + (y' - \beta)\, dy' = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$dx'^2 + dy'^2 + (y' - \beta)\, d^2y' = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Supprimant les accents, l'on a les trois équations (1), (2), (3) pour déterminer les éléments cherchés du cercle osculateur.

Théorie fluxionnelle des cercles de courbure.

159. Lemme. *Lorsque d'un point situé sur un diamètre d'une parabole, on mène une corde conjuguée à ce diamètre, il y a équivalence entre les rectangles faits sur la sécante et sa partie extérieure* (d'une part), *et sur le paramètre diamétral de cette sécante et la partie extérieure du diamètre choisi* (d'autre part).

Soit P (fig. 15) le paramètre diamétral de direction BK ; on sait que

$$\overline{AC}^2 = P \cdot BC$$
$$\overline{ND}^2 = P \cdot BD.$$

D'où par soustraction et décomposition

$$\overline{AC}^2 - \overline{ND}^2 = P\,(BC - BD)$$
$$(AC + ND)(AC - ND) = P\,(BC - BD)$$

D'où

$$OS \cdot ON = P \cdot OA.$$

160. Corollaire. Si ONS en se mouvant parallèlement à elle-même devient tangente en B, en vertu de la continuité du mode de génération curviligne, la propriété précédente existe encore, et l'on a

$$\overline{BP}^2 = P \cdot A'P.$$

Du reste on eut pu établir directement ce résultat, que nous avons préféré déduire d'une propriété plus générale relative à une sécante parabolique.

En convenant d'appeler *distance conjuguée* ou tangentielle celle comptée parallèlement aux cordes conjuguées d'un diamètre, on a cet énoncé :

Le carré de la distance conjuguée ou tangentielle d'un diamètre à un autre est équivalent au rectangle fait sur le paramètre de l'un de ces diamètres, et sur la partie extérieure de l'autre.

161. THÉORÈME. *Soient* (fig. 16) *une courbe* AMH *et un cercle* AFB, *de centre* C', *tangents en* A *à la même droite* VV' ; *soit une sécante quelconque* DZ *parallèle à* AB ; *de plus considérons, une courbe* BQR *passant par* B *et déterminée de manière à satisfaire pour toute position de* DZ *à la condition*

$$\overline{AD}^2 = DM \cdot DQ$$

Il faut prouver que la courbure de AMH *en* A *sera la même que celle du cercle* AFB.

DÉMONSTRATION. On a par une propriété connue

$$DF \cdot DG = \overline{AD}^2$$

D'ailleurs par les données de la question,

$$\overline{AD}^2 = DM \cdot DQ$$

La multiplication membre à membre de ces deux relations conduit à

$$DF \cdot DG = DM \cdot DQ$$

ou

$$\frac{DF}{DM} = \frac{DQ}{DG}$$

1° *Supposons que la partie* BQ *de la courbe* BR *soit extérieure au cercle* AC et que DZ se meuve parallèlement à elle-même vers AB.

Il est clair qu'alors, pendant que Q décrit QB, DQ étant plus grand que DG, on aura toujours :

$$DF > DM$$

D'où l'on voit que l'*arc* AM *est compris entre le cercle et sa tangente.*

Cela dit, il est évident qu'*un cercle d'un rayon moindre que* AC et tangent en A étant intérieur à celui AC, *ne peut passer entre les arcs* AM *et* AF.

De plus si l'on considère un cercle d'un rayon

$$AC' > AC$$

On pourra prendre AD de manière que le second point S d'intersection de cette circonférence avec DZ soit tel que

$$DQ < DS$$

Quelle que soit la position du premier point F' de rencontre, on aura

$$DF' \cdot DS = \overline{AD}^2$$

et

$$\overline{AD}^2 = DM \cdot DQ$$

D'où

$$\frac{DF'}{DM} = \frac{DQ}{DS}$$

Et comme DQ < DS, dans le mouvement imprimé à DZ vers AB, l'on aura constamment :

$$DF' < DM$$

Ce qui prouve que la circonférence AC' ne peut passer entre les arcs AM et AF' et que par suite : *Aucune circonférence ne peut passer entre les arcs* AM *et* AF, *qui ont ainsi en* A MÊME COURBURE.

162. 2° Supposons en second lieu que l'*arc* BR (fig. 17) *soit intérieur à la circonférence* AC

On a

$$\frac{DF}{DM} = \frac{DQ}{DG}$$

Dans le mouvement de DZ, on aura donc toujours

$$DF < DM$$

Donc l'arc AF est situé entre l'arc AM et la tangente VV'.

Une circonférence de rayon plus grand que AC, tangente en A, ayant pour intérieure celle AC, ne pourra donc pas passer entre les arcs AF et AM.

Si l'on considère une circonférence de rayon,

$$AC' < AC$$

en désignant par S son second point de rencontre avec DZ, quelle que soit la position du premier désigné par F', l'on aura encore :

$$DF' \cdot DS = DM \cdot DQ$$

D'où

$$\frac{DF'}{DM} = \frac{DQ}{DS}$$

Mais

$$DQ > DS$$

Donc dans le mouvement de DZ, l'on a sans cesse,

$$DF' > DM$$

Ce qui montre que la circonférence AC' est, dans l'intervalle de AB à DZ, comprise entre la courbe AMH et la corde AB.

Dans tous les cas on voit donc que :

Des circonférences que l'on peut décrire, tangentes en A, *aucune ne passe* ENTRE *l'arc* AM *et l'arc de cercle* AF *déterminé par la relation*

$$DM \cdot DQ = \overline{AD}^2$$

Ce qui signifie évidemment que la *courbe* AMH *et la circonférence* AC *ont même courbure en* A.

163. Théorème. *Soient* (fig. 18) HAM *la courbe donnée*, C *son centre de courbure*, Am *une parabole ayant avec cette courbe la tangente* VV′ *commune ; soient enfin une droite* FQ *donnée parallèle à* PP′ *et* DZ *une parallèle à* BK. Prenant QR de manière que

$$\text{Surf. FQR} = \text{Vm}\cdot\text{BD} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Il faut démontrer que le point R, *ainsi déterminé, sera toujours situé sur une droite* FR, *connue de position.*

Démonstration. On a, si AK est le paramètre diamétral parabolique de A

$$\text{Vm}.\text{AK} = \overline{\text{AV}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

D'où, par division de (1) et (2),

$$\frac{\text{Surf. FQR}}{\overline{\text{AV}}^2} = \frac{\text{BD}}{\text{AK}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Mais AV est donné, ainsi que FQ, donc si l'on représente par Δ le rapport de ces quantités, l'on aura

$$\frac{\overline{\text{AV}}^2}{\overline{\text{FQ}}^2} = \Delta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Par multiplication les relations (3) et (4) fournissent

$$\frac{\text{Surf. FQR}}{\overline{\text{FQ}}^2} = \Delta\cdot\frac{\text{BD}}{\text{AK}}$$

D'où, après simplification du premier membre,

$$\text{QR} = 2\text{FQ}\cdot\Delta^2\cdot\frac{\text{BD}}{\text{AK}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Le second membre de cette relation (5) étant complétement déterminé, il en est de même du premier, c'est-à-dire de la quantité QR.

164. *Définition de la seconde fluxion* $\ddot{y}$

Comme la ligne PP′ pourrait être celle sur laquelle est choisi FQ, en prenant AF = MS, on posera :

$$QS = \ddot{y}$$

En suivant DZ dans son mouvement vers BK, si l'on construit chaque fois le point S, on obtiendra une courbe qui sera la *courbe fluxionnelle*, tangente évidemment en F à la droite FR.

Pour cette nouvelle courbe, on a

$$QR = \dot{\overline{BF}} = \ddot{y}$$

Donc QR est la seconde fluxion de l'ordonnée y de la courbe HAM.

165. L'égalité (5), n° 163, fournit en remplaçant Δ par sa valeur

$$\frac{AK}{2} = QR = FQ \cdot BD \cdot \frac{\overline{AV}^2}{\overline{FQ}^2}$$

D'où

$$\frac{AK}{2} = A\alpha = \frac{\overline{AV}^2}{QR}$$

Mais,

$$QR = \ddot{y}\,, \quad \overline{AV}^2 = \dot{s}^2$$

Donc

$$A\alpha = \frac{\dot{s}^2}{\ddot{y}}$$

Et de ce résultat on pourrait déduire une construction très-simple du centre de courbure.

166. *Calcul du rayon de courbure.*

On sait que

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

D'ou, puisque x est constant,

$$\dot{s}.\ddot{s} = \dot{y}.\ddot{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Substituant à $\ddot{y}$ la valeur que l'on déduit de cette relation, dans l'expression de $A\alpha$ du paragraphe précédent, on obtient :

$$A\alpha = \frac{\dot{s}.\dot{y}}{\ddot{s}}$$

Le triangle $AC\alpha$ donne :

$$AC.\ \cos.\ CA\alpha$$

ou comme $\widehat{CA\alpha}$ est égal à l'angle fait par la tangente VV′ avec la droite PP′ prise pour axe des X, et que la tangente de cet angle est $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, on aura en représentant par ϱ le rayon AC de courbure :

$$\varrho \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{s}\,\dot{y}}{\ddot{s}}$$

ou

$$\varrho \frac{\dot{x}}{\dot{s}} = \frac{\dot{s}\,\dot{y}}{\ddot{s}}$$

D'où

$$\varrho = \frac{\dot{s}^2}{\dot{x}} \cdot \frac{\dot{y}}{\ddot{s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Mais de (1) l'on tire

$$\frac{\dot{y}}{\ddot{s}} = \frac{\dot{s}}{\ddot{y}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Et la multiplication, membre à membre, des relations (2) et (3) donne enfin

$$\varrho = \frac{\dot{s}^3}{\dot{x}\,\ddot{y}}$$

167. *Par la méthode des dérivations de Lagrange*

Soient

$$y = fx$$
$$y = \mathrm{F}x$$

les équations de deux courbes que l'on veut *comparer*.

Pour que ces deux courbes aient un point commun d'abscisse x, il faut que

$$fx = \mathrm{F}x$$

Pour étudier comparativement le cours de ces courbes, on donne à x dans ces équations l'accroissement i, et l'on aura pour différence des coordonnées correspondant à l'abscisse $x + i$,

$$f(x+i) - \mathrm{F}(x+i) = i(f'x - \mathrm{F}'x) + \frac{i^2}{2}(f''x - \mathrm{F}''x) + \frac{i^3}{2.3}(f'''x - \mathrm{F}'''x) + \text{etc.}$$

Cette différence sera d'autant moindre qu'il y aura un plus grand nombre de termes qui disparaîtront au commencement de cette série, c'est-à-dire que les deux courbes se rapprocheront d'autant plus l'une de l'autre (ou auront un contact plus intime), qu'il y aura un plus grand nombre de dérivées égales dans les équations des deux courbes.

Considérons ensuite une troisième courbe

$$y = \varphi x$$

Supposons que les trois courbes aient un point commun dont l'abscisse est x ; on démontre avec facilité que la courbe φx ne peut passer entre fx et $\mathrm{F}x$, à moins qu'entre les équations $y = fx$ et $y = \varphi x$ il n'y ait un plus grand nombre de dérivées égales de même ordre qu'entre $y = fx$ et $y = \mathrm{F}x$.

Telle est l'idée que l'on doit se faire de ces différents degrés de rapprochement, que l'on appelle communément *contact*, *osculation*, etc.

168. Partant de ces notions générales relatives aux courbes osculatrices, choisissons, pour le comparer avec la courbe pro-

posée, le cercle dont l'équation, en coordonnées rectangles est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$$

α, β, ϱ étant les éléments du cercle, savoir α et β les coordonnées du centre et ϱ le rayon.

On en tire

$$y=\beta+\sqrt{\varrho^2-(x-\alpha)^2}=\mathrm{F}x$$

et

$$\mathrm{F}'x=-\frac{x-\alpha}{\sqrt{\varrho^2-(x-\alpha)^2}}$$

Posant

$$\mathrm{F}x=fx$$
$$\mathrm{F}'x=f'x$$

On aura

$$x-\alpha=\frac{\varrho f'x}{\sqrt{1+f'^2x}}$$

$$y-\beta=-\frac{\varrho}{\sqrt{1+f'^2x}}.$$

D'où

$$\alpha=x-\frac{\varrho f'x}{\sqrt{1+f'^2x}} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\beta=y+\frac{\varrho}{\sqrt{1+f'^2x}} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les quantités α et β sont des fonctions de la quantité ϱ restée jusqu'à présent, dans ce calcul, entièrement arbitraire ; mais on pourra déterminer la valeur de ϱ en imposant, comme nous allons le faire, une nouvelle condition dérivatrice entre la courbe et la circonférence donnée.

Parmi les diverses circonférences satisfaisant aux équations (1) et (2), cherchons celle qui donne.

$$F''x = f''x$$

On aura alors

$$F''x = -\frac{\varrho^2}{[\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Mais comme

$$\sqrt{\varrho^2 - (x-\alpha)^2} = -\frac{x-\alpha}{f'x} = -\frac{\varrho}{\sqrt{1+f'^2x}}$$

On aura, en substituant dans $F''x$,

$$F''x = f''x = \frac{[1+f'^2x]^{\frac{3}{2}}}{\varrho}$$

D'où

$$\varrho = \frac{[1+f'^2x]^{\frac{3}{2}}}{f''x}$$

et par suite

$$\alpha = x - \frac{f'x\,(1+f'^2x)}{f''x}$$

$$\beta = y + \frac{1+f'^2x}{f''x}$$

Les trois constantes α, β, ϱ, qui entrent dans l'équation générale de la circonférence osculatrice, sont ainsi déterminées.

169. Le rayon de courbure, traité à la méthode Newtonnienne, nous montre ce que l'on peut dans des questions d'ordre supérieur, avec les éléments de la géométrie ancienne ; mais aussi avec quelle longueur procèdent de semblables recherches ! Et puis rien ne laisse apercevoir l'idée qui conduit à la détermina-

tion du rayon ρ, qui n'est saisie qu'au passage et pour ainsi dire furtivement.

Par la méthode de Lagrange, ρ est la conséquence de la théorie osculatrice, ce qui n'est certes pas un titre d'exclusion ; mais ni Newton ni Lagrange n'expliquent *la liaison intime de génération* existant entre une courbe et son cercle de courbure en un point donné.

La méthode de M. Lamarle rend seule compte de cette liaison, en la saisissant, en l'établissant *à priori* comme *manifestation explicite* de la variation continuelle incessante de la direction tangentielle.

3e *Exemple.* — *De la force centrifuge.*

170. La théorie fondamentale du mouvement curviligne d'une molécule isolée repose sur la détermination de la mesure de la *force centrifuge.*

Par la Méthode INFINITÉSIMALE.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Lorsqu'un mobile décrit une trajectoire sous l'action combinée d'une force instantanée qui agit dans une direction quelconque à l'origine du mouvement, et d'une force accélératrice dirigée constamment vers un centre fixe, les aires décrites par le rayon recteur du mobile autour de ce centre, sont égales pendant des temps égaux.*

Soit M (fig. 19) un point sollicité suivant MP par une force instantanée dont l'espace parcouru est Mn pendant un temps infiniment petit ; ce point est simultanément soumis à une force accélératrice dont le centre d'action est en C, et dont la vitesse propre pendant ce temps infiniment petit est Mm ; M parcourra la diagonale du parallélogramme Mn M'm ; arrivé en M' les choses se passent comme en M, en donnant lieu à un nouvel élément M'M'', et ainsi de suite : il faut établir l'équivalence des surfaces CMM', CM'M'', CM''M''', etc.

Cette proposition devient évidente si l'on tire les droites Cn', C''n, C'''n, etc.

171. Considérons d'abord un point M assujéti à se mouvoir (fig. 20) sur une circonférence de rayon CM ou r, et auquel est appliquée tangentiellement suivant MP une vitesse quelconque ;

M tendra à s'échapper par la tangente en exerçant sur le fil une tension qui dépend de la vitesse du mouvement et qui est appelée *force centrifuge*. La force qui maintiendrait M à la distance CM du point C, est appelée *force centripète*.

Comme l'arc MM' est infiniment petit *il peut* être confondu avec sa corde, ce qui donne

$$MQ = \frac{\overline{MM'}^2}{2r} = \text{Sin. verse } MM'$$

Si f représente l'intensité de la force centrifuge nous savons qu'une force accélératrice constante a pour mesure le double de l'espace parcouru pendant un temps quelconque, divisé par le carré de ce temps. On aura donc ici :

$$f = \frac{1}{r} \cdot \frac{\overline{MM'}^2}{dt^2}$$

Mais si v désigne la vitesse du point,

$$\frac{MM'}{dt} = v$$

Il viendra

$$f = \frac{v^2}{r}$$

172. Passons au cas de la force centrifuge pour une courbe quelconque.

Il suffit pour cela de concevoir que la détermination de cette force exigeant seulement la considération simultanée de deux éléments consécutifs de la courbe proposée, le mouvement peut être continuellement envisagé comme ayant lieu sur la circonférence osculatrice correspondante qui a avec la courbe, au point d'osculation deux éléments successifs communs.

C'est ainsi que l'on applique à une courbe l'expression de la force centrifuge trouvée pour la circonférence ; r devient dès lors le rayon du cercle osculateur.

173. Nous ne dirons que peu de chose pour découvrir le défaut de cette théorie.

D'abord pour la circonférence, la détermination est faite en considérant la corde MM′ comme parcourue dans le mouvement, ce qui, au point de vue philosophique, suffirait déjà pour rejeter cette théorie.

Ensuite c'est par suite d'une HYPOTHÈSE toute gratuite et toute *illogique* que l'on conçoit la circonférence osculatrice comme ayant deux éléments consécutifs communs avec la courbe ; l'extension donnée ici disparaît donc toute entière.

Et nous ne pouvons nous empêcher de le redire encore : entre la courbe et la circonférence osculatrice en un point, il y a ce *seul* point commun, ainsi que la tangente ; mais en général *il n'y a pas à partir du point de contact ou d'osculation d'arc de courbe*, si petit d'ailleurs qu'on veuille bien le supposer, *qui puisse être considéré comme se confondant avec la circonférence osculatrice.*

Il serait tout aussi absurde de prétendre qu'une courbe et son osculatrice ont des éléments communs que de dire, ou poser en principe, que la courbe peut se déduire de la forme polygonale : C'est le même ordre d'idées.

174. *Par la* THÉORIE FLUXIONNELLE.

Newton avait dit aussi :

La vitesse d'un mouvement variable se mesure par l'espace qui serait décrit dans un temps donné si le mouvement était continué uniformément, et non pas par celui qui est décrit réellement pendant ce temps.

La force qui accélère ou retarde un mouvement curviligne se mesure donc toujours par la *fluxion de la vitesse* du mouvement, c'est-à-dire puisque la vitesse est la première fluxion de l'espace, par la seconde fluxion de l'espace décrit en vertu du mouvement.

175. Supposons (fig. 21) que la droite Az, coupant en M la courbe MR, se meuve parallèlement à elle même et à OY d'un *mouvement* UNIFORME, le long d'une droite OX, et qu'une force agisse toujours dans la direction Az ; le modèle M parcourra la génératrice Az de la même manière que si Az était en repos et que la force eut agi dans sa direction. Cette force sera donc en chaque instant mesurée par la fluxion de la vitesse avec laquelle le mobile se déplace sur OX ou par la seconde fluxion de AM, ordonnée de la trajectoire du point.

176. Faisons voir actuellement que :

Lorsqu'une courbe est décrite par une force qui agit suivant des lignes parallèles, cette force est directement proportionnelle au carré de la vitesse du mobile, et inversement proportionnelle à la corde du cercle de courbure de ce point.

Démonstration. Soit AC la fluxion de Ao, ou la vitesse de A ; par C menons la génératrice Cu rencontrant la tangente en P, et la courbe en R ; la fluxion de la courbe satisfait, avons-nous établi (n° 160) à l'équation,

$$MV = \frac{\dot{s}^2}{\ddot{y}}, \text{ d'où } \ddot{y} = \frac{\dot{s}^2}{MV}$$

Ce qui prouve que la force centrifuge, qui se mesure par la seconde fluxion de l'ordonnée, est directement proportionnelle au carré de la vitesse, et inversement, à la corde du cercle de courbure qui passe par le point considéré.

177. Théorème. *Soit* (fig. 22) *une courbe* AB *décrite par une force centripète dirigée vers* S ; *soit* AP *l'intensité de cette force au point* A, *et soit* PQ *perpendiculaire à la tangente;* AQ *représentera l'intensité de la force avec laquelle le point* A *se meut sur la tangente de* A *en* A' , *et* PQ *celle de la force avec laquelle le point générateur s'infléchit sur la tangente.*

Démonstration. En effet soit O le centre du cercle AC de courbure, et D la projection de O sur AS ; les triangles semblables AOD et APR donnent

$$\frac{AR}{AP} = \frac{AD}{AO}, \text{ ou } \frac{PQ}{AP} = \frac{AD}{AO}$$

Mais puisque AP est, par hypothèse, l'intensité de la force centrifuge, on a

$$AP = \frac{\dot{s}^2}{AD}$$

Après substitution et réduction, il vient :

$$PQ = \frac{\dot{s}^2}{AO} \text{ et } AO = \frac{\dot{s}^2}{PQ}$$

D'où l'on voit que le rayon de courbure ne dépend que de la vitesse en A et de la force PQ.

Donc AQ *variant et* PQ *ne variant pas, la courbure reste* CONSTANTE.

178. THÉORÈME. *Lorsqu'une courbe est décrite par une force centripète dirigée vers un point donné* S, *la force centrifuge est proportionnelle au carré de la vitesse, et est en raison inverse du diamètre du cercle de courbure.*

Démonstration. On vient de voir que la force tangentielle AQ n'exerce aucune influence sur l'inflexion PQ suivant la tangente en A ; il est par suite évident que l'on peut transformer la force centripète de centre S, en une autre agissant au point O, centre de courbure, mais dont l'intensité est

$$\mathrm{PQ} = \frac{\dot{s}^2}{\mathrm{AO}}$$

Représentant AO par ϱ,

$$\mathrm{PQ} = \frac{\dot{s}^2}{\varrho}$$

D'où l'on voit enfin que pour une trajectoire quelconque décrite sous l'action d'une force centripète agissant vers un point quelconque donné, la force centrifuge est directement proportionnelle au carré de la vitesse, et inversement proportionnelle au rayon, ou au diamètre de courbure.

179. *Principe fondamental des applications dynamiques de la conception de Lagrange.*

La question de la force centrifuge se déduisant immédiatement des équations générales du mouvement d'un point matériel, c'est à ces équations qu'il faut remonter pour saisir le principe des applications dynamiques de la *théorie des fonctions analytiques.*

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Tout mouvement rectiligne, représenté par l'équation.*

$$x = f(t)$$

peut dans un instant quelconque au bout du temps t, *être regardé comme composé d'un mouvement uniforme dû à une vitesse me-*

surée par f't, *et d'un mouvement uniformément accéléré dû à une force accélératrice agissant avec une intensité proportionnelle à* f''t.

Démonstration. Donnons à t l'accroissement θ, il viendra :

$$ft + \theta f't + \frac{\theta^2}{2} \cdot f''t + \frac{\theta^3}{2 \cdot 3} f'''(t + \alpha\theta)$$

α étant une quantité comprise entre θ et 1 ; l'espace parcouru pendant le temps θ sera donc

$$\Delta x = \theta f't + \frac{\theta^2}{2} \cdot f''t + \frac{\theta^3}{2 \cdot 3} f'''(t + \alpha\theta) \quad . \quad . \quad (1)$$

Ce développement prouve que pour une même valeur quelconque de t, mais déterminée, l'espace $0f't$ est uniformément parcouru pour les diverses valeurs de θ, avec une vitesse $f't$; et de plus, qu'un second mouvement d'intensité

$$\frac{\theta^2}{2} \cdot f''t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

se distingue ; ce second mouvement, qui est évidemment uniformément varié est animé d'une vitesse proportionnelle à $\frac{f''t}{2}$

Reste un troisième mouvement global

$$\frac{\theta^3}{2 \cdot 3} f'''(t + \alpha\theta). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

tenant lieu d'un nombre illimité d'autres petits mouvements ; mais *nous allons démontrer qu'au commencement du temps* θ ON PEUT NE PAS AVOIR ÉGARD A CE TROISIÈME MOUVEMENT.

Considérons pour cela un autre mouvement formé d'un mouvement uniforme à vitesse a et d'un mouvement varié d'intensité b; soit donc

$$a\theta + b\theta$$

l'espace ainsi parcouru, supposé différent par ses deux composants

de celui dont (1) est l'expression, et dont la différence avec (1) qui est l'espace réellement décrit est

$$\theta\left[f't-a\right]+\theta^2\left[\frac{f''t}{2}-b\right]+\frac{\theta^3}{2\cdot3}f'''(t+\alpha\theta) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Or, il est évident que tant que a et b différeront respectivement de $f't$ et $\frac{f''t}{2}$, on pourra prendre θ assez petit pour que, (en se plaçant ainsi à la naissance de θ), l'on ait toujours et d'autant plus que θ s'approche de o,

$$\theta\left[f't-a\right]+\theta^2\left[\frac{f''t}{2}-b\right]+\frac{\theta^3}{2\cdot3}f'''(t+\alpha\theta)>\frac{\theta^3}{2\cdot3}f'''(t+\alpha\theta)$$

Et comme relativement à

$$\frac{\theta^3}{2\cdot3}f'''(t+\alpha\theta)=\Delta x\cdot\left[\theta f't+\frac{\theta^2}{2}f''t\right]$$

le premier nombre converge vers o avec θ, il est clair que, A L'INSTANT OU θ COMMENCE, $\theta f't$ *exprime tout ce qu'il y a d'uniforme dans le mouvement proposé, et que le terme* $\frac{\theta^2}{2}f''t$ *exprime de même tout ce qu'il peut y avoir d'uniformément varié dans ce mouvement.*

180. *Scholie.* 1° Si les causes produisant la variation du mouvement viennent à cesser, ou à être suspendues, le mouvement se continue uniformément en vertu de la vitesse $f't$.

2° Pour tout mouvement rectiligne dans lequel l'espace parcouru est fonction du temps, la *fonction prime* représente la vitesse, et la *fonction seconde*, la force accélératrice dans un temps quelconque.

181. Remarquons en passant que le principe des fluxions de Newton se trouve mis en évidence par le théorème qui vient d'être établi; mais notons bien aussi que *analytiquement comme conception dynamique le fait du développement uniforme et transitoire* d'une fonction vient d'être signalé : il est dès lors surprenant que Lagrange ait touché de si près à la vérité manifestée explicitement et complètement par la conception de M. Lamarle.

182. En considérant le mouvement uniforme et le mouvement uniformément accéléré

$$x = at$$

et

$$x = bt^2$$

pour lesquels on a respectivement :

$$x' = a\,,\ x'' = o$$

et

$$x' = 2bt\,,\ x'' = 2b = 2\,\frac{x}{t^2}$$

On déduit ces lois relatives au mouvement uniformément varié :

1° *La vitesse est proportionnelle au temps écoulé depuis l'origine du mouvement.*

2° *La force accélératrice est mesurée par le double du rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir.*

183. *Mouvement curviligne.*

Soit un mouvement quelconque engendrant la courbe aux coordonnées générales x, y, z fonctions données du temps t.

Le point générateur sera doué, suivant chacun des trois axes, de deux mouvements l'un uniforme, l'autre varié ; sur ces axes représentons ces mouvements par

$$\begin{array}{c} x' \text{ et } x'' \\ y' \text{ et } y'' \\ z' \text{ et } z'' \end{array}$$

Des vitesses uniformes x', y', z' résulte la force totale

$$u = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

déterminée en direction par les relations

$$x' = u.\ \cos\alpha$$
$$y' = u.\ \cos\beta$$
$$z' = u.\ \cos\gamma$$

Et si l'on remarque que u affecte la forme de la dérivée de l'arc de la courbe parcourue, en considérant s comme fonction t on aura s' pour vitesse $\frac{ds}{dt}$; de plus cette vitesse est dirigée suivant la tangente à la trajectoire, ce qui ressort des équations aux cosinus.

Les forces accélératrices x'', y'', z'', donnent par leur composition une résultante P, faisant avec les axes les angles K, l, m ; cette résultante se trouve définie par les équations

$$\mathrm{P} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''}$$

$$x'' = \mathrm{P}.\ \cos k$$
$$y'' = \mathrm{P}.\ \cos l$$
$$x'' = \mathrm{P}.\ \cos m.$$

Si le mobile était soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces accélératrices, les équations générales du mouvement curviligne seraient :

$$x'' = \Sigma\,\mathrm{P}.\ \cos k$$
$$y'' = \Sigma\,\mathrm{P}.\ \cos l$$
$$z'' = \Sigma\mathrm{P}.\ \cos m.$$

184. *Mesure de la force accélératrice selon la conception de M. Lamarle.*

Soit

$$e = f(t)$$

l'équation donnée ou connue qui lie le temps et l'espace parcouru par un mobile. Supposant qu'à l'instant donné t, la fonction f et le mouvement qu'elle représente se développent d'une manière permanente, en persistant dans la détermination acquise à l'instant t, nous aurons (d'après ce que l'on a vu)

$$de = \Delta t \cdot f't$$

Et puisqu'il s'agit dans cette équation d'un mouvement uniforme pour lequel on a nécessairement

$$v = \frac{de}{\Delta t}$$

il viendra

$$v = f't$$

D'où par différentiation :

$$dv = \Delta t \cdot f''t$$

ce qui est l'équation d'un mouvement uniforme dont l'intensité (c'est-à-dire la mesure de la force accélératrice proposée), est représentée par

$$f''t.$$

185. *Détermination de la force centrifuge par la méthode de M. Lamarle.*

Ici encore une fois se montre l'extrême promptitude de cette conception : parcourue d'un mouvement uniforme, la circonférence osculatrice offrant en un quelconque de ses points les circonstances qui, *transitoirement* seulement, s'étaient présentées sur la courbe au point d'osculation, il est évident que la question de *la mesure de la force centrifuge sur une courbe en un point donné*, est ramenée à celle de la même force sur la circonférence osculatrice en ce point.

186. Considérons donc spécialement (fig. 20) le cas d'une circonférence de rayon

$$oM = \varrho$$

et dont M est le point d'osculation. Si à l'instant où le mobile est en M, la force centrale venait à cesser son action, la molécule s'échapperait suivant la tangente MX en persistant dans l'état

du mouvement qui l'animait en M. Alors pendant le temps Δt l'espace MP eut été décrit sur la tangente, tandis qu'en vertu de la force centrale le point M eut, librement, et sous cette seule influence, parcouru MQ pendant le même temps Δt.

Représentons par f l'intensité de la force centrale : une force accélératrice, (et c'est ici le cas, puisqu'à partir du point M sur la circonférence on suppose le mouvement uniforme ou persistant dans l'état propre et transitoire à M), se mesure par le chemin qu'elle fait parcourir au mobile dans l'unité de temps ; et cet espace est double de celui parcouru en vertu de cette force pendant un temps quelconque divisé par le carré de ce temps.

Nous aurons donc ici

$$f = 2\,\frac{\overline{\mathrm{MQ}}}{\Delta t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

En menant la corde MM réellement parcourue pendant Δt, on a :

$$2\rho \cdot \mathrm{MQ} = \overline{\mathrm{MM'}}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Multipliant membre à membre ces deux relations, on obtient

$$\rho \cdot f = \frac{\overline{\mathrm{MQ'}}^2}{\Delta t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Et comme l'équation (3) subsiste pour Δt quelconque, on aura encore à la limite :

$$\rho \cdot f = \lim. \frac{\overline{\mathrm{MM'}}^2}{\Delta t^2} = \left[\frac{ds}{dt}\right]^2$$

Et si v représente la vitesse $\frac{ds}{dt}$, on a

$$f = \frac{v^2}{\rho}$$

Telle est la loi ou formule connue.

187. *Aptitude de la conception de M. Lamarle ou Calcul Intégral.*

Examinons enfin comment la nouvelle définition se prête à la définition de l'intégrale. Nous avons vu que

1° Dans tout intervalle où la fonction

$$y = f(x)$$

est continue, (et pour une valeur quelconque de x), la génération des accroissements simultanés Δy et Δx, commence d'après une certaine loi de proportionnalité exprimée pour ce point, origine de ces accroissements, par $f'(x)$

3. Cette loi, considérée dans tous les états successifs que comporte l'intervalle Δx constitue la *loi variée* à laquelle est dû le DÉVELOPPEMENT CONTINU de Δy (*la différence*).

3° Mais considérée *hypothétiquement* et TRANSITOIREMENT comme constante pendant l'intervalle Δx, et persistant pendant cet intervalle dans la détermination qui la particularisait à l'origine même de cet accroissement, ou à la *loi uniforme* en vertu de laquelle se développe la différentielle dy; l'on a alors

$$dy = \Delta x \cdot f'x.$$

et comme Δx est constant, puisque l'on suppose que x se développe d'une manière uniforme, il vient

$$\Delta x = dx$$

D'où

$$dy = dx \cdot f'x.$$

4° L'accroissement effectif, ou la différence Δy est la moyenne arithmétique des valeurs par lesquelles passe la dérivée $f'x$, c'est-à-dire que

$$\Delta y = \Delta \cdot fx = \Delta x \cdot \mathrm{M}_{x}^{x+\Delta x} f'x.$$

Actuellement on peut se proposer le problème inverse de celui résolu généralement par le calcul différentiel, savoir :

Etant donnée l'Equation différentielle

$$dy = dx \cdot f'x$$

Connaître la fonction primitive $y = fx$.

L'opération nouvelle alors nécessitée prend le nom d'*Intégration*, et a pour but de retrouver le Δy, ne cherchant à former l'équation

$$\Delta y = dx \cdot \mathrm{M}_{x}^{x+\Delta x} f'x.$$

Seulement l'on emploie le signe $\int$ comme signe sommatoire ou d'intégration, et l'on écrit avec cette signification,

$$\Delta y = \int_{x}^{x+dx} f'x dx = f(x+dx) - f(x)$$

Pour déduire de cette formule celle ordinaire et générale de l'intégration, posons (n étant un nombre entier quelconque)

$$n \cdot dx = x'$$

Et faisons, à l'aide de dx, passer x successivement par tous les états de grandeur de x à x' ; on obtiendra,

$$f(x+dx) - fx = \int_{x}^{x+dx} f'x\, dx$$

$$f(x+2dx) - f(x+dx) = \int_{x+dx}^{x+2dx} f'x\, dx$$

$$f(x+3dx - f(x+2dx) = \int_{x+2dx}^{x+3dx} f'x\, dx$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(x+ndx) - f(x+\overline{n-1}\, dx) = \int_{x+\overline{n-1}.dx}^{x+ndx} f'x \cdot dx$$

D'où par addition

$$fx' - fx = \int_{x}^{x'} fx\, dx$$

Faisant $x = o$, puis changeant x' en x, il vient enfin,

$$fx - f(o) = \int_{o}^{x} f'x.dx.$$

ce qui est la formule usuelle d'intégration.

188. La signification rationnelle de l'intégrale se trouve ainsi naturellement déduite de la différentielle, et se prête avec promptitude et facilité à toutes les applications.

Il est inutile croyons-nous d'examiner l'appropriation des autres conceptions au calcul intégral ; c'est-là un sujet très-connu et qui a mis assez souvent à découvert l'insuffisance philosophique, rationnelle et pratique de chacune des conceptions antérieures à celle qui a été l'objet principal de ce travail.

CONCLUSION.

—

Dans la seconde partie de l'étude que nous présentons, nous avons établi, en suivant presque complètement le système de M. Lamarle, les *vrais principes* des calculs transcendants.

Par une discussion approfondie, nous avons, croyons-nous, fait ressortir toute la supériorité de ce nouveau système, mis en évidence sa rigueur absolue ainsi que l'insuffisance ou l'irrationnalité des autres conceptions.

Prise dans la *nature des idées*, et non *dans les principes de opérations mathématiques*, OU ELLE NE SE TROUVE PAS, la nouvelle méthode revêt un caractère qui la distingue immédiatement des autres systèmes, et qui semble, *au premier abord seulement*, la rendre plus difficile.

Si l'examen que nous venons de terminer a quelque mérite, son auteur en reporte tout l'honneur au savant qui, dans l'interprétation de sa nouvellle doctrine, a soutenu de ses conseils et de ses lumières un de ses élèves, heureux de lui offrir, par ce modeste travail, un bien faible témoignage de son respectueux attachement.

FIN.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION. 145

PREMIÈRE PARTIE.

ÉPOQUE ANCIENNE.

CHAPITRE I. Méthode d'Exhaustion (ARCHIMÈDE). — Appréciation critique de cette méthode. 147

CHAPITRE II. KÉPLER. 158

CHAPITRE III. Bonaventure CAVALLERI. — Réfutation de sa doctrine des indivisibles 160

CHAPITRE IV. ROBERVAL. — Sa génération dynamique curviligne, et ses tangentes. Insuffisance de cette méthode. . 167

CHAPITRE V. FERMAT. 172

CHAPITRE VI. BARROW 174

SECONDE PARTIE.

EPOQUE MODERNE.

SECTION I 177

EXAMEN CRITIQUE DES CONCEPTS CONNUS.

Distinction générale de l'analyse transcendante. — Nécessité indispensable de l'Etude des diverses conceptions 178

CHAPITRE I. *Analyse infinitésimale. — Calcul de Leibnitz* . . . 179

Calcul des successeurs de Leibnitz (les Bernouilli, l'Hospital), etc 181

Aptitude nécessaire du calcul infinitésimal quant à la mise en Equation 183
Imperfection logique de l'analyse infinitésimale. . . 184
L'infiniment petit ne peut exister 185
Des définitions de Cauchy et Poinsot. 186
Les séries prouvent-elles l'existence des infinis . . 187
Le principe de continuité infirme le point de vue infinitésimal . . . . . Ib.
Doctrine de Carnot sur la compensation nécessaire des erreurs infinitésimales 189

CHAPITRE II. *Méthode des premières et dernières raisons* ou *Méthode des limites.* — Exposé succinct du principe. 192
Défaut et insuffisance de ce concept 193

CHAPITRE III. *Théorie des fluxions.* — Principes fondamentaux. . 196
Identité générale du concept fluxionnel et de celui des limites 197
Insuffisance de la seconde conception de Newton. . Ib.

CHAPITRE IV. *Calcul des Dérivées de Lagrange*, ou *théorie des fonctions analytiques et du calcul des fonctions.* — Exposition et appréciation philosophique du principe de Lagrange 198
Insuffisance de la seconde conception des dérivations 200

CHAPITRE V. Comparaison générale et rapprochement des trois grandes conceptions infinitésimale, fluxionnelle et dérivatrice. 202

—

SECTION II.

—

CONCEPTION DE M. LAMARLE.

CHAPITRE I. Examen *a priori* des affections diverses que peut présenter le rapport.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Continuité de la fonction $f'(x)$ 206

CHAPITRE II. De l'équation différentielle; sa vraie définition. — Différence ou accroissement différentiel. — Signification de Δy par rapport à $f'(x)$. — Théorème des moyennes 233

CHAPITRE III. Exposé nouveau des principales applications analytiques de l'Equation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)$$

Règles particulières de dérivation, déduite d'un principe unique. — Différences des ordres supérieures. — Moyennes multiples 239

CHAPITRE IV. Puissance acquise par l'analyse transcendante à l'aide de l'exacte définition de l'Equation différentielle. Mode d'application de la conception nouvelle aux questions géométriques. — Tangente-plan tangent. . 250

CHAPITRE V. Quelques exemples traités par chacune des méthodes d'analyse transcendante exposées précédemment

1er Exemple. — Différentielle d'un arc de courbe . 255

2e Exemple. — Du cercle Osculateur , *son exacte définition.* — Rayon de courbure. 262

3e Exemple. — De la force centrifuge 279

Aptitude de la Conception de M.Lamarle au calcul Intégral. 290

Conclusion 293

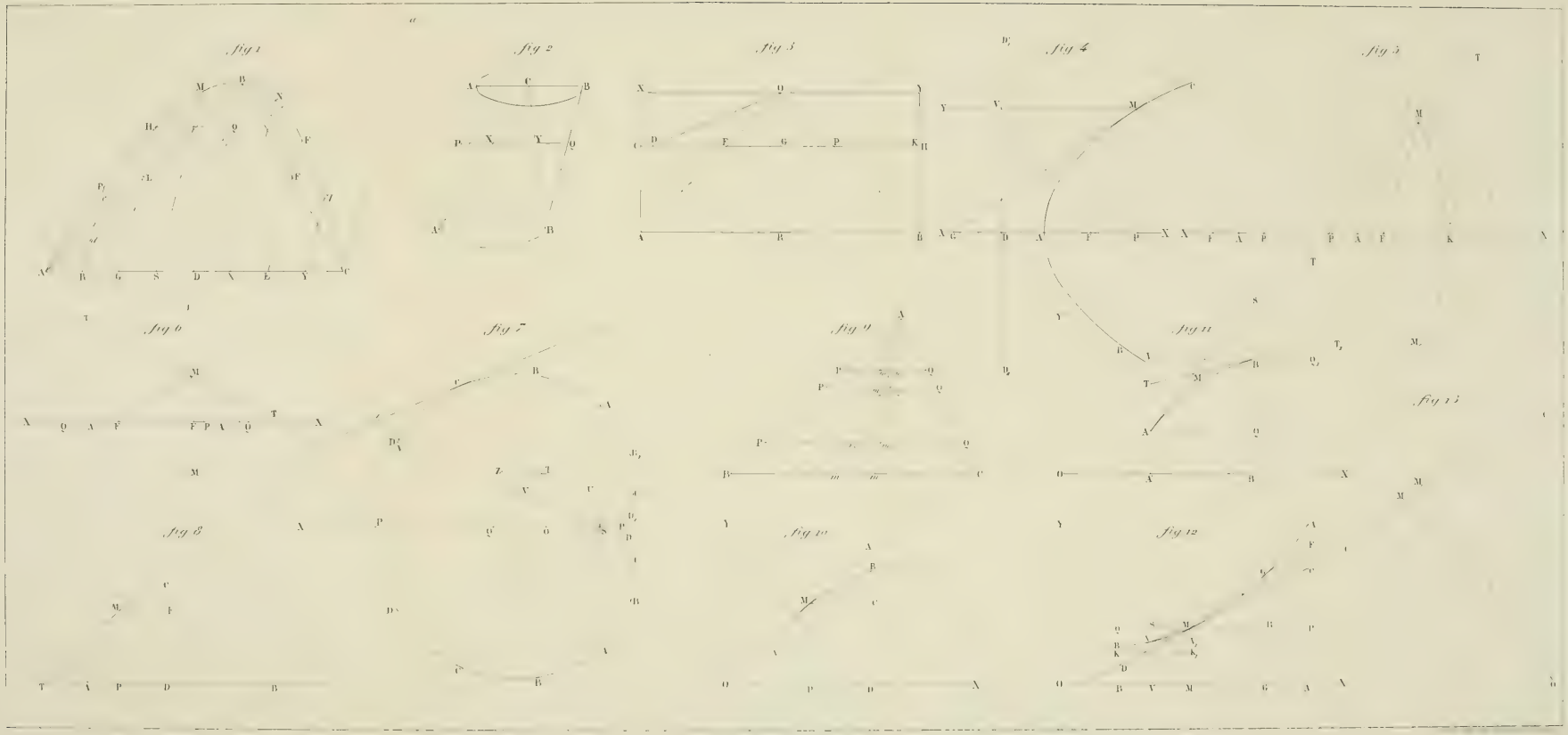
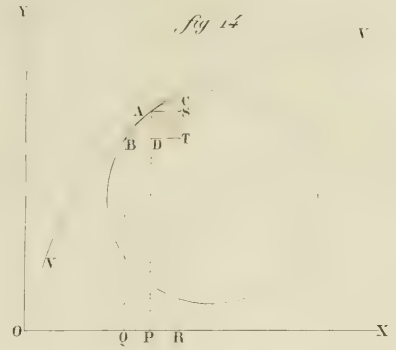
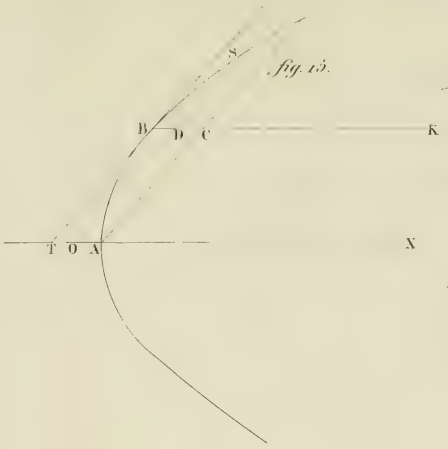
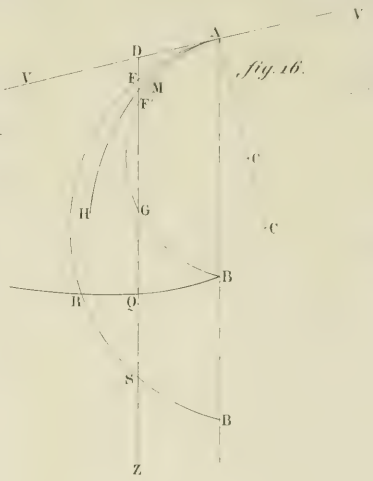
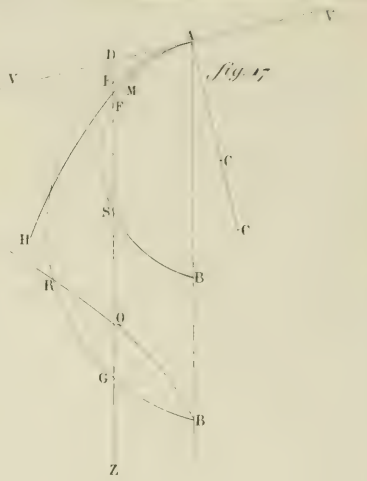


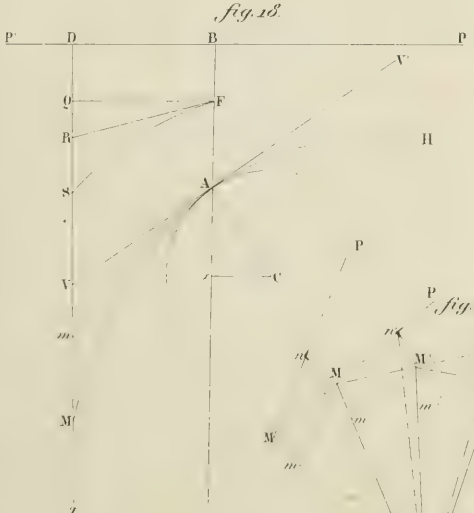
fig 1
fig 2
fig 3
fig 4
fig 5
fig 6
fig 7
fig 8
fig 9
fig 10
fig 11
fig 12

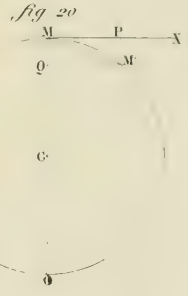


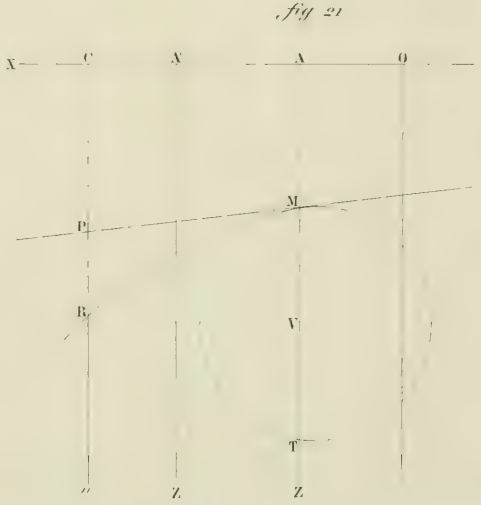


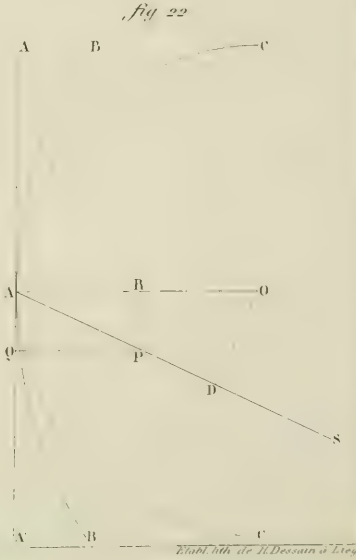


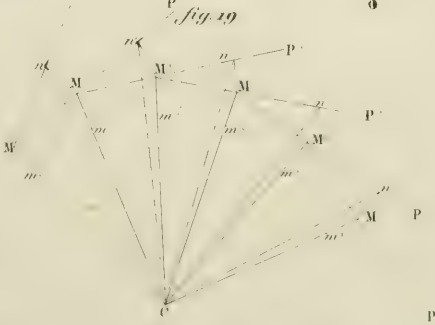












Etabl. lith. de H. Dessain à Liège

V. — *Notice sur l'action du fer et du zinc dans les dissolutions des métaux dont les oxydes sont solubles dans l'ammoniaque.*

PAR

Is. KUPFFERSCHLAEGER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Les métaux dont les oxydes hydratés se dissolvent dans un excès d'ammoniaque, sont : le zinc, le nickel, le cobalt, le cadmium, le cuivre et l'argent.

Nous ne rangeons pas l'étain dans cette catégorie, parce que l'hydrate stannique est incomplétement soluble dans l'ammoniaque, même ajoutée en excès, quoi qu'en dise M. Régnault (T. 3e de son cours de chimie, aux caractères des composés stanniques); aussi M. Rose a-t-il soin de dire (dans son Traité de chimie analytique de 1858, page 245,) à propos des sels stanniques : « l'ammoniaque y produit un volumineux précipité d'oxyde stannique qui n'est pas tout à fait *insoluble* dans un excès du précipitant. »

Cet oxyde est donc plus insoluble que soluble dans l'ammoniaque, ainsi que nous l'avons vérifié; quoi qu'il en soit, nous consacrerons quelques lignes à l'étain et au mercure, parce qu'ils nous ont offert diverses particularités bonnes à signaler.

Lorsqu'on veut décomposer les dissolutions métalliques dont il s'agit plus haut, par le moyen du fer ou du zinc, il n'est pas indifférent, surtout au point de vue de l'analyse, d'employer l'un ou l'autre de ces deux métaux et de ne tenir aucun compte de la présence de l'ammoniaque ou de son chlorure dans la liqueur, parce que les réactions changent notablement dans différents cas que nous allons exposer.

On sait que le fer et le zinc ne se précipitent pas réciproquement ni leurs dissolutions respectives non plus ; qu'ils ne produisent également rien dans les dissolutions zinciques additionnées d'ammoniaque ou de chlorure ammonique, mais, au contraire, qu'ils y conservent leur éclat métallique, même en vase ouvert.

C'est, — ainsi qu'on l'a expliqué —, parceque la polarité électro positive de ces deux métaux est relativement diminuée par le contact des alcalis ; mais il n'en est pas de même pour les dissolutions des autres métaux dont il va être question ; et pour mieux faire ressortir la différence qui existe entre l'aciton du fer et celle du zinc, nous les plaçons parallèlement.

ACTION DU FER.

Lorsque l'on plonge une lame de fer dans chacune des dissolutions neutres de nickel, de cobalt, de cadmium, d'étain, de cuivre, d'argent et de mercure, les quatre premières dissolutions ne sont point précipitées, tandis que les trois dernières le sont à l'état de métal réduit.

Avant d'aller plus loin, nous ferons observer qne la manière de voir des chimistes varie à l'égard de l'action du fer sur les dissolutions d'étain.

Ainsi, 1° MM. Thénard père, Régnault, Barruel et Malaguti, ont rapporté, dans leurs Traités de Chimie, que le fer précipite l'étain de ses sels; 2° MM. Berzélius, Dumas, Rose, Baudrimont, Frésénius, Will et Cahours, ne mentionnent pas cette réaction ; par conséquent ils n'attribuent pas cette propriété au fer ; 3° M. Normandy, dans ses tableaux d'analyse chimique, dit : le fer précipite les dissolutions d'or, d'argent, de cuivre, de tellure et d'antimoine; 4° quant à nous, il nous a été impossible d'obtenir la moindre trace d'étain réduit par l'emploi du fer dans les différents essais que nous rapportons plus loin.

ACTION DU ZINC.

Le zinc placé dans les mêmes dissolutions ne précipite pas les deux premières, mais bien les cinq dernières à l'état de métal réduit. Toutefois, les dissolutions d'étain se comportent différemment selon qu'elles sont stanneuses on stanniques ; il en sera question plus loin. On verra que nous ne sommes pas tout à fait d'accord avec ce que disent MM. Rose (p. 247) et Frésénius (Analyse qualitative, p. 118), de la précipitation des sels stanniques : nous admettons qu'il se précipite *toujours* de l'oxyde stannique, que la dissolution ait été faite avec de l'acide azotique ou sans.

Bien que Berzélius ait rapporté (Traité de chimie, dernière édition, T. 4e, p. 18) que le zinc

ACTION DU FER.

C'est pourquoi nous pouvons conclure de tout ce qui précède, que le fer ne précipite point l'étain à l'état métallique ; et ce qui nous porte à croire que les quatre chimistes cités en premier, n'ont ni vu ni obtenu cette précipitation, c'est qu'ils ont écrit : *Une lame de fer ou de zinc ;* ou bien, *le fer et le zinc ;* ou encore : *le fer, le zinc et autres, etc., réduisent les sels d'étain*, et qu'ils n'indiquent jamais le fer seul pour produire cette précipitation. Du reste, on sait que l'étain a plus d'affinité que le fer pour le chlore ; par conséquent ses chlorures ne doivent pas être réduits à l'état métallique par le fer.

Pour ce qui est de la réduction de l'argent, M. Rose dit, dans l'ouvrage déjà cité, T. 1^er^, page 166 : « Le fer métallique ne réduit pas la dissolution de nitrate d'argent. » C'est inexact et contraire à ce que rapportent Berzélius, Régnault, Normandy et Barruel. Cependant, comme nous avons fait, à plusieurs reprises, toutes les expériences qui sont consignées dans cette Notice, nous dirons que M. Rose a pu fort bien ne pas obtenir la précipitation de l'argent par le fer, parce qu'elle n'a pas lieu chaque fois : pour la réussir, il faut opérer avec une dissolution argentique non étendue, du fer bien décapé et un peu rugueux ; on est ainsi dans les meilleures conditions pour réduire l'azotate argentique, qui laisse déposer au bout d'un certain temps de l'argent réduit et plus blanc que lorsqu'il a été précipité par le zinc ou le cuivre. C'est donc parceque ces deux derniers métaux précipitent l'argent dans toutes les conditions et rapidement, alors qu'il n'en est pas de même pour le fer, qu'on a pu se méprendre, car le fer réduit l'azotate argentique en vase clos et en vase ouvert.

ACTION DU ZINC.

précipite, d'après *Tupputi*, de l'hydrate niccolique vert, de la dissolution de nickel, lorsqu'on opère au contact de l'air, il nous a été impossible de reproduire cette réaction ; chaque fois nous avons obtenu l'oxydation du zinc, à la longue, et pas la moindre trace de celui-ci en dissolution dans la liqueur.

Le sulfate niccolique employé était cristallisé et neutre ; mais si l'on fait usage d'un sulfate de nickel acide, alors le zinc sera immédiatement attaqué et son oxyde, ainsi formé, pourra déplacer de l'oxyde niccolique ; c'est ce dernier cas qui s'est peut-être produit dans les expériences de *Tupputi*, car les chimistes n'indiquent pas cette réaction.

Mais lorsque les dissolutions sont ammoniacalisées ou addi-

DISSOLUTIONS.	AMMONIACALISÉES (POUR REDISSOUDRE LES PRÉCIPITÉS D'ABORD FORMÉS.)	
	LE FER.	LE ZINC.
	1° *En vase fermé.*	
Niccoliques.	N'a rien produit, même au bout de plusieurs jours; il y a conservé son éclat métallique.	Après plusieurs jours, formation d'un dépôt blanc, floconneux, insoluble dans l'eau et soluble dans le chloride hydrique. La dissolution n'a fourni que les réactions du zinc. La lame de zinc, débarrassée de ce dépôt, était recouverte d'aspérités grises, qui enlevées et dissoutes dans le chloride hydrique ont donné lieu à un dégagement d'hydrogène et à une dissolution reconnue zincique.
	2° *En vase ouvert.*	
	A produit, après vingt-quatre heures de contact, un léger dépôt paraissant bleuâtre dans la liqueur; celle-ci sentait encore l'ammoniaque, avait conservé sa transparence et sa teinte bleue; l'éclat du fer n'était point terni. Le dépôt bien lavé, puis redissous par le ClH et essayé, a donné les réactions de l'oxyde de nickel.	A réagi presqu'aussitôt : il a produit aussi, à la longue, un précipité floconneux bleuâtre, qui devenait vert à mesure qu'il se dessèchait sur le filtre, et enfin gris par une dessiccation complète. Sa dissolution dans le ClH a présenté les principaux caractères des composés niccoliques et un peu ceux des zinciques aussi.

C'est évidemment à la volatilisation d'une partie de l'ammoniaque et à l'acide carbonique de l'air que l'on doit attribuer la précipitation de l'oxyde niccolique dans ces deux cas, puisque le fer avait conservé son brillant, et qu'on sait que le carbonate ammonique précipite les dissolutions de nickel. Le même précipité se produit sans plonger aucun métal dans la dissolution ammoniacalisée exposée à l'air.

tionnées de chlorure ammonique, voici ce qui se passe :

ADDITIONNÉES DE CHLORURE AMMONIQUE

LE FER.	LE ZINC.
1° *En vase fermé.*	
A produit du jour au lendemain un dépôt des deux couleurs verte et jaune, et formé d'oxydes ferrique et niccolique, car l'ammoniaque versée dessus a dissous la partie verte.	A donné lieu à un dépôt blanc-verdâtre sur la lame de zinc, insoluble dans l'eau, soluble dans le ClH, et la dissolution a fourni les caractères du zinc et très-peu ceux du nickel.

Ce sont donc principalement les deux métaux qui ont été attaqués tant par le chlorure ammonique que par l'oxygène de l'air condensé dans les liqueurs ; du reste le fer est attaqué en vase fermé, au bout de vingt quatre heures dans une solution de sel ammoniac, qui se colore en jaunâtre.

2° *En vase ouvert.*	
Léger précipité floconneux, jaunâtre et insoluble par l'ammoniaque. Dissous au moyen du ClH, la dissolution a donné exclusivement les réactions de l'oxyde ferrique.	Comme dans les liqueurs ammoniacalisées.

Ces réactions confirment l'explication donnée un peu plus haut.

DISSOLUTIONS.	AMMONIACALISÉES.	
	LE FER.	LE ZINC.
	1° *En vase fermé.*	
Cobaltiques.	N'a rien produit; après quarante huit heures il possédait encore son brillant métallique.	A produit aussitôt une réaction, et après vingt quatre heures, un précipité blanc, qui dissous dans le ClH a fourni toutes les réactions du zinc ; c'était donc son oxyde.
	2° *En vase ouvert.*	
	Après vingt quatre heures, précipité bleu lavande, un peu verdâtre par dessiccation. Dissous dans le ClH, caractères des dissolutions cobaltiques.	Même réaction que ci-contre à gauche ; le précipité était plus abondant parce qu'il contenait un peu d'oxyde zincique.
	Cette précipitation est due à la volatilisation partielle de l'ammoniaque et à l'influence de l'air.	
	3° *En vase fermé.*	
Cadmiques.	Y est resté brillant.	A réagi immédiatement : aiguilles brillantes de cadmium réduit, et la dissolution séparée était du sulfate zincique.
	4° *En vase ouvert.*	
	Après vingt quatre heures, précipité floconneux, blanc, légèrement jaunâtre, d'oxyde cadmique hydraté, mêlé d'un peu d'oxyde ferrique. Lavé et dissous, il a donné les caractères des composés cadmiques. Le fer était resté brillant, sauf dans quelques points de sa surface.	A pris immédiatement une teinte noire et s'est recouvert aussitôt de paillettes brillantes de cadmium réduit. Le lendemain, abondant dépôt gris de cadmium qui adhérait au zinc.

ADDITIONNÉES DE CHLORURE AMMONIQUE.

LE FER.	LE ZINC.
1° *En vase fermé.*	
A réagi de suite, mais lentement, et après vingt quatre heures, dépôt floconneux, brun foncé qui, dissous dans le clH et essayé, a donné les réactions des sels ferriques exclusivement.	A réagi de suite aussi, et après vingt quatre heures, précipité blanc qui a donné les réactions de l'oxyde zincique.
2° *En vase ouvert.*	
Après vingt quatre heures, précipité floconneux, jaunâtre, qui dissous dans le clH a fourni les réactions du cobalt et un peu celles du fer.	Précipité blanc rosé, qui a montré les réactions du cobalt.
3° *En vase fermé.*	
Rien ; il est resté brillant.	A produit une mousse grise, de cadmium réduit, et la liqueur séparée était du sulfate zincique.
4° *En vase ouvert.*	
Comme à la 1re colonne de gauche.	Comme en vase fermé. Les dissolutions cadmiques sont plus profondément attaquées dans ce cas que dans celui des dissolutions ammoniacalisées.

DISSOLUTIONS.	AMMONIACALISÉES.	
	LE FER.	LE ZINC.
	1° *En vase fermé.*	
Cuivriques.	Rien; il a conservé son brillant.	A réagi immédiatement, mais lentement : le cuivre s'est déposé sur les deux faces de la lame de zinc, et a formé, enfin, des dendrides fines, d'un brun rougeâtre, et brillantes lorsqu'on les agitait dans la liqueur devenue incolore.
	2° *En vase ouvert.*	
	A la longue : précipité d'oxyde ferrique.	A produit immédiatement un précipité de cuivre réduit, sous la forme de petites paillettes rondes, brillantes, de couleur rouge clair; plus tard, un dépôt floconneux de cuivre brillant, de couleur rouge-brun.
	1° *En vase fermé.*	
Argentiques.	Rien si l'ammoniaque est en excès; mais si on n'en a mis que juste ce qu'il faut pour redissoudre l'oxyde argentique, alors le fer peut, au bout de plusieurs heures, précipiter de l'argent réduit en mamelons adhérents au métal réducteur.	Précipite de l'argent réduit, de couleur gris noirâtre.
	2° *En vase ouvert.*	
	De même.	Idem.
	Le cuivre précipite immédiatement l'argent de ses dissolutions ammoniacalisées, en vase clos et en vase ouvert, sous forme de flocons gris.	

ADDITIONNÉES DE CHLORURE AMMONIQUE.

LE FER.	LE ZINC.
1° *En vase fermé.*	
A réagi immédiatement et s'est recouvert d'un enduit rouge de cuivre.	A fait apparaître immédiatement un précipité brun, en mousse non brillante, de cuivre réduit.
2° *En vase ouvert.*	
Comme en vase fermé.	Idem.

Comme le chlorure ammonique produit un précipité blanc de chlorure argentique, nous avons ajouté d'abord de l'ammoniaque pour redissoudre ce dernier, et puis les deux métaux fer et zinc.

1° *En vase fermé.*	
A réagi lentement, et la réduction a été complète au bout de huit heures : précipité d'argent en rameaux blancs.	Est devenu noir aussitôt, et l'argent s'est précipité en longs flocons noirs, qui agités dans de l'eau acidulée de clH. ont pris une teinte grise d'argent réduit.
2° *En vase ouvert.*	
Même réaction, mais moins lente.	Idem.

Le cuivre précipite dans ce cas l'argent en gris noir.

DISSOLUTIONS	SANS AMMONIAQUE, puisque celle-ci ne dissout pas complétement les oxydes d'étain.	
	LE FER.	LE ZINC.
	1° *En vase fermé.*	
Stanneuses.	N'a rien produit, même au bout de cinq heures de contact.	A réagi immédiatement et a donné lieu à de l'étain réduit.
	2° *En vase ouvert.*	
	Rien après le même laps de temps.	Comme en vase fermé.
	1° *En vase fermé.*	
Stanniques.	Transforme les sels stanniques en stanneux, et il devient sel ferreux.	Si la dissolution stannique a été faite avec de l'eau Régale, et jusqu'à refus de dissoudre de l'étain, le zinc y plongé donne lieu d'abord à un précipité blanc gélatineux d'oxyde stannique, et ensuite à un léger dépôt gris, d'étain pulvérulent, sur la lame de zinc; il est peu apparent. Si la dissolution stannique a été obtenue en dissolvant de l'hydrate stannique (précipité par l'ammoniaque et bien lavé) dans de l'acide chlorhydrique, à chaud et jusqu'à refus, pour qu'il n'y ait point un excès d'acide, le zinc en précipite d'abord de l'oxyde stanniquegélatineux, et à la longue, de l'étain réduit sous forme d'écailles minces adhérentes au zinc. Quand la dissolution est acide, la quantité d'étain réduit est plus forte; ce qui est dû à l'hydrogène.

ADDITIONNÉES DE CHLORURE AMMONIQUE.

LE FER.	LE ZINC.
1° *En vase fermé.*	
Rien, même après dix heures de contact.	A réagi aussitôt : mousse grise, non brillante, d'étain réduit.
2° *En vase ouvert.*	
Rien.	Comme plus haut.
1° *En vase fermé.*	
Ramène la dissolution stannique à l'état stanneux, et est lui-même transformé en chlorure ferreux.	Réagit immédiatement et produit un précipité d'oxyde stannique gélatineux, puis après, un peu d'étain métallique.

DISSOLUTIONS.	SANS AMMONIAQUE, puisque celle-ci ne dissout pas complétement les oxydes d'étain.	
	LE FER.	LE ZINC.
	2° *En vase ouvert.*	
Stanniques.	La même réaction se produit d'abord, et à la longue, c'est-à-dire après vingt-quatre heures, il se forme un précipité blanc jaunâtre, d'oxydes ferrique et stanneux ou sesquioxyde stannique. C'est par l'oxygène de l'air que le fer excédant s'oxyde et détermine cette dernière réaction, ainsi que nous l'avons déjà rapporté pour d'autres dissolutions. C'est aussi en traitant le chlorure stanneux par de l'hydrate ferrique que M. Fuchs a obtenu le sesquioxyde stannique.	La même chose qu'en vase fermé.

ADDITIONNÉES DE CHLORURE AMMONIQUE.

LE FER.	LE ZINC.
2° *En vase ouvert.*	
Comme en vase fermé.	Comme en vase fermé.

Dans les différents cas dont il est question dans ce tableau, le zinc enlève tout le chlore à l'étain et élimine complètement celui-ci de ses dissolutions ; les liqueurs examinées après les réactions étaient uniquement zinciques.

DISSOLUTIONS	SANS AMMONIAQUE, PUISQU'ELLE NE DISSOUT POINT LES OXYDES DE MERCURE. ADDITIONNÉES DE CHLORURE AMMONIQUE.			
	LE FER.	LE ZINC.	LE CUIVRE.	
	1° *En vase fermé.*			
Mercuriques.	Les réduit immédiatement et se recouvre d'un enduit gris de mercure, peu adhérent.	Comme le fer, mais au bout de quelques heures la lame de zinc devient brillante et cassante.	Se recouvre de mercure comme les deux autres métaux.	Les dissolutions mercureuses, donnant lieu à un précipité blanc par l'addition du chlorure ammonique, n'ont pas été essayées.
	2° *En vase ouvert.*			
	Comme plus haut.	Comme plus haut.	Après le mercure réduit, il se forme un précipité blanc, floconneux, insoluble dans l'eau, mais soluble dans le clH. à chaud, et la dissolution donne les réactions des composés mercuriques. Ce précipité doit être de l'oxydochlorure mercurique, parce que ce dernier se dissout également dans le clH. Il s'est volatilisé entièrement dans le tube fermé en un sublimé blanc surmonté d'un autre, gris et brillant, de mercure réduit.	

Des expériences qui précèdent, nous concluons :

1° que l'ammoniaque ne modifie l'action du fer et du zinc dans les dissolutions de Nickel, de Cobalt, de Cadmium, d'Argent et de Cuivre, que par rapport à ce dernier, dont elle empêche la précipitation par le fer et non par le zinc. Elle n'empêche pas, non plus, le cuivre de précipiter l'argent ;

2° que le chlorure ammonique ne change pas la manière d'agir ordinaire des deux métaux dans les mêmes dissolutions ; seulement on peut remarquer qu'il active un peu l'action du fer et celle du zinc, en les décapant probablement, ce qui détermine le commencement de la réaction par laquelle se forment les chlorures doubles. Il en est de même pour le cuivre dans les dissolutions argentiques ;

3° que le fer *peut* réduire à l'état métallique les dissolutions d'argent, et qu'il ne peut le faire pour celles d'étain ; qu'en conséquence, il faut, pour être certain de réussir dans ces deux cas, employer le zinc.

Tels sont les résultats que nous avons obtenus : en les publiant, nous avons eu en vue de fixer des faits qui ne l'étaient point et sur lesquels on n'était pas d'accord, parce que l'on croyait, généralement, que l'ammoniaque et son chlorure empêchent certaines réactions qui, au contraire, se produisent très-évidemment : telles sont celles du zinc et du cuivre dans les dissolutions cadmiques, cuivriques, argentiques et mercuriques, additionnées de l'un ou de l'autre de ces deux composés alcalins ; et qu'en outre l'on poussait trop loin la similitude entre l'action du zinc et celle du fer.

Liége, le 10 mars 1860.

VI. — *Nouvelle Méthode pour déterminer le centre de gravité des corps*

PAR

E. TERSSEN,

MAJOR D'ARTILLERIE, OFFICIER DE L'ORDRE DE LÉOPOLD.

SOMMAIRE :

A. Application aux projectiles oblongs ou allongés.

B. Application aux corps de révolution qui n'existent qu'en projet. Détermination de l'aire de la section génératrice et du poids du solide engendré.

C. Solution générale du problème.

A. APPLICATION AUX PROJECTILES OBLONGS.

Le Journal de l'artillerie Espagnole et la Revue de Technologie militaire, par le Colonel L. Delobel, ont fait connaître l'*Excentrimètre* que j'ai construit en 1846. Cet instrument n'était qu'un cas particulier d'une nouvelle espèce de balances que j'appelle *Centroscopiques*, parce qu'elles ont pour fonction de déterminer la position du centre de gravité des corps.

L'Excentrimètre sert à mesurer la distance du centre de gravité au centre de figure des projectiles sphériques, c'est-à-dire leur excentricité. La nouvelle balance que j'ai construite en 1858, et qui est représentée *Planche I*, est destinée aux balles oblongues ou allongées. Rien ne serait, du reste, plus facile que d'en faire une balance pour boulets et obus ogivo-cylindriques, car il suffirait de proportionner ses dimensions à celles de ces projectiles.

La balance centroscopique destinée aux balles allongées se compose d'un fléau, d'un bassin et d'un pied ou support. *Fig.* 1. La forme générale du fléau est celle d'une cuiller dont le cuilleron, très-allongé, est divisé en deux parties de même longueur par une plaque de séparation. La projection horizontale du cuilleron est représentée *Fig.* 2 ; on y remarque deux plans inclinés, séparés par une gouttière, et taillés en lime pour empêcher les balles de glisser. Le bassin est suspendu à l'extrémité opposée au cuilleron, et le couteau se trouve à égale distance du milieu de la plaque de séparation du cuilleron et du point de suspension du bassin. La balance (fléau et bassin) est en équilibre à vide.

Le pied ne diffère guère des pieds de balances ordinaires, si ce n'est que, sur le côté droit du montant, se trouve fixé un support coudé terminé par une chape de forme rectangulaire. Cette chape donne passage au fléau, et sert à plusieurs fins. D'abord elle permet d'arrêter le fléau au moyen d'une broche traversant le fléau et les deux côtés de la chape. En second lieu, elle limite les oscillations du fléau, ce qui est indispensable, car la balance n'ayant qu'un seul bassin, est exposée à se renverser complètement lorsque son équilibre vient à être détruit. Enfin la position d'équilibre du fléau est indiquée par deux repères, l'un tracé sur le fléau, l'autre sur la chape, ce qui dispense de l'emploi d'une aiguille.

Dans les premières balances qui ont été construites, il arrivait souvent que le fléau touchait l'un des côtés de la chape, et s'arrêtait court par suite de l'adhérence. On a remédié à cet inconvénient en arrêtant le couteau dans le sens de sa longueur, par deux petites plaques faisant ressort, et en coupant les deux extrémités du couteau en sifflet, de manière qu'elles ne touchent aux plaques que par un point. On a, en même temps, beaucoup augmenté la longueur du couteau, afin de mieux assurer la position du fléau. La *Fig.* 3 représente la coupe de la fourche porte-fléau par un plan vertical passant par l'arête du couteau.

Une particularité digne de remarque, et qui est inhérente à toutes les balances centroscopiques, c'est que le corps placé sur le fléau agit comme s'il en faisait partie ; de telle sorte que le centre de gravité du système s'élève ou s'abaisse suivant que le centre de gravité du corps se trouve au-dessus ou au-dessou

du centre de gravité du fléau à vide. Delà résultent plusieurs conséquences importantes au point de vue de la construction des instruments de l'espèce.

1° En ce qui concerne la balance pour balles allongées, premier objet de cette notice, il faut que le prolongement de l'axe de la balle du plus fort calibre, placée sur le cuilleron, ne passe pas au-dessus de l'arête du couteau, afin que le centre de gravité du système ne puisse, en aucun cas, se trouver sur cette arête, ce qui aurait pour effet de rendre la balance *paresseuse*, ni au-dessus, ce qui la rendrait *folle*. Il faut donc que le coude du fléau soit calculé d'après le diamètre de la plus grosse balle en usage.

2° Le coude du fléau ayant été calculé pour la balle du plus fort calibre, si on remplace celle-ci par la balle du plus petit calibre, le centre de gravité du système descend, et si la différence entre ces deux balles est très-grande, la balance peut devenir *sourde*. Il faut alors adapter au fléau, au-dessus du couteau et bien d'équerre, une vis fixe, sur laquelle se meut un écrou d'un poids suffisant pour faire monter le centre de gravité à la hauteur convenable. (*) Mais ce dispositif est généralement inutile pour des différences qui n'excèdent pas celles des calibres actuellement en usage dans les armées Européennes.

3° Il est bon que le poids du fléau soit notablement plus grand que le poids de la plus grosse balle, afin que ce dernier ait moins d'influence sur la position du centre de gravité du fléau chargé.

La détermination du centre de gravité des balles allongées, au moyen de la balance centroscopique, est très-simple, très-expéditive et aussi exacte qu'on peut le désirer. On commence par équilibrer le fléau à vide s'il ne l'est déjà, puis on place la balle sur le cuilleron, sa pointe appuyée à la plaque de séparation, et l'on pèse. On place ensuite la balle sur l'autre partie du cuilleron, sa pointe toujours appuyée à la plaque de séparation, et l'on pèse de nouveau. Il suffit alors de diviser la différence des deux poids par leur somme, et de multiplier le quotient par la distance de l'arête du couteau au milieu

(*) On pourrait aussi faire l'inverse; c'est-à-dire calculer le coude pour une balle de petit calibre et placer la vis avec son écrou mobile au-dessous du fléau comme le montre la *Fig.* 5, *Planche* II.

de la plaque de séparation du cuilleron, pour avoir la distance de ce dernier point au centre de gravité de la balle. Par conséquent, si l'on retranche du produit la demi-épaisseur de la plaque, on a la distance du centre de gravité de la balle à sa pointe.

Pour le prouver, soient :

P le poids de la balle, *Fig. 4* ;

Q et Q′ les poids qui lui font successivement équilibre dans les deux positions inverses **1** et **2** ;

a la distance de l'arête du couteau au milieu de la plaque de séparation du cuilleron ;

b la distance de la même arête au point de suspension du bassin ;

c l'épaisseur de la plaque de séparation ;

d la distance du milieu de la plaque de séparation au centre de gravité de la balle ;

e la distance du centre de gravité de la balle à sa pointe.

Les deux pesées donnent les équations :

$$P(a+d) = Qb$$
$$P(a-d) = Q'b$$

Divisant la première équation par la seconde, on a :

$$\frac{a+d}{a-d} = \frac{Q}{Q'}$$

D'où l'on tire :

$$d = \frac{Q-Q'}{Q+Q'}\,a$$

Remplaçant d par $e + \frac{c}{2}$, on trouve :

$$e = \frac{(Q - Q')a}{Q + Q'} - \frac{c}{2}$$

Lorsque les constantes a et c sont exprimées en millimètres, la valeur de e est elle-même exprimée en millimètres. Dans la balance représentée *Planche I*, $a = b = 100$ mill. et $c = 2$ mill. La valeur de e est donc simplement :

$$e = 100\,\frac{Q - Q'}{Q + Q'} - 1$$

De plus, si l'on ajoute les deux équations d'équilibre, membre à membre, on en déduit :

$$P = \frac{Q + Q'}{2}$$

C'est-à-dire que le poids de la balle est la moyenne arithmétique des deux poids obtenus par la double pesée.

Un mot, avant de terminer, sur l'utilité de ma balance. Lorsque les balles étaient sphériques, on pouvait, sans inconvénient, admettre que leur centre de gravité était exactement au centre de figure, en sorte que la position du premier de ces points n'importait pas à la balistique (*). Mais il en est tout autrement du moment que les balles affectent des formes allongées, pointues, évidées, etc.; car alors la position du centre de gravité a une influence prépondérante sur la marche du mobile. Or, les formes des nouvelles balles, chez les diverses puissances de l'Europe, sont tellement variées, et la plupart s'éloignent tellement des formes géométriques élémentaires, que le calcul, même approximatif, de leur centre de gravité est sinon impossible du moins extrêmement laborieux. Avec la balance centroscopique, cette opération se réduit, en définitive, à une double pesée, une addition, une soustraction et une division.

(*) Ceci ne s'applique point, bien entendu, aux bombes et obus sphériques, dont l'excentricité est très-sensible et joue un rôle important.

B. Application aux corps de révolution qui n'existent qu'en projet. Détermination de l'aire de la section génératrice et du poids du solide engendré.

Depuis que le chapitre précédent a été écrit, j'ai eu besoin, à plusieurs reprises, de calculer la position du centre de gravité et le poids de projectiles ogivo-cylindriques qui n'existaient encore que sur le papier. Malgré une longue habitude du calcul, et tout en me contentant d'une approximation assez grossière, j'ai trouvé parfois ce travail extrêmement pénible. L'idée m'est venue alors d'employer la balance centroscopique, et le résultat que j'ai obtenu est tel qu'il m'a paru digne d'être connu.

Je donnerai d'abord le problème général ; puis j'en ferai l'application à un corps de révolution, en prenant pour exemple un obus ogivo-cylindrique d'un système particulier.

On sait que les figures dont on peut déterminer exactement l'aire et le centre de gravité sont relativement peu nombreuses. L'industrie et les arts d'application emploient souvent des figures variées qui s'écartent complètement des figures géométriques, et auxquelles, par conséquent, les méthodes exactes ne sont pas applicables. Pour calculer l'aire de ces figures, les constructeurs n'ont d'autre ressource que la formule de Thomas Simpson. Mais l'application de cette formule exige une foule d'opérations graphiques, qui la rendent compliquée, lente et sujette à erreurs ; et c'est bien pis encore quand, voulant calculer le volume ou le poids du solide engendré par une de ces figures, on cherche à déterminer son centre de gravité.

Or, la balance centroscopique peut nous donner, avec la plus grande facilité, dans un temps relativement court, et avec une approximation très-suffisante :

1° L'aire d'une figure plane quelconque ;

2° La position de son centre de gravité.

Si donc la figure dont il s'agit est la section génératrice d'un solide, et que l'on connaisse le lieu des diverses positions que son centre de gravité occupe pendant la génération, ou en d'autres termes, le chemin parcouru par ce centre, rien ne sera plus facile que de calculer le volume ou le poids du solide engendré. De

sorte que le problème comprend non-seulement les corps de révolution, mais tous ceux auxquels la loi de Guldin est applicable.

Les *Fig.* 5 et 6, *Planche II*, font voir de quelle manière le fléau de la balance représentée *Planche I* doit être modifié. Le cuilleron, qui est une forme particulière appropriée aux projectiles oblongs, est remplacé par un disque de 150 mill. de diamètre, fixé au fléau, et horizontal lorsque le fléau est en équilibre. Sur ce disque sont tracés deux diamètres à angle droit, dont l'un AB est perpendiculaire à la direction du fléau. L'arête du couteau est à 100 mill. du point de suspension du bassin, comme dans le fléau à cuilleron, et à 100 mill. du centre du disque. La balance (fléau et bassin) est toujours censée en équilibre à vide.

Voici comment on opère pour trouver le poids d'un solide de révolution qui n'existe qu'en projet :

Tracer la section génératrice du corps sur de bon papier à dessiner, serré et homogène, tel que le Bristol, en ayant soin d'y tracer deux axes, l'un *ab* parallèle à l'axe de révolution *yz* ou se confondant avec lui, l'autre *cd* perpendiculaire au premier, *Fig.* 7. — Découper exactement la section génératrice, et la placer sur le disque du fléau, de manière que les deux axes couvrent les deux diamètres, par exemple, *ab* sur AB, et peser. — Faire décrire un demi-tour à la section (il n'est pas nécessaire de la retourner à l'envers, la symétrie n'étant pas de rigueur); faire coïncider de nouveau les axes et les diamètres, *ab* sur AB, et peser. — Enfin recommencer la double pesée, en faisant coïncider deux fois *cd* et AB.

La première double pesée fait connaître la distance du centre de gravité de la section à l'axe *ab*, et la seconde à l'axe *cd*, par la formule

$$E = \frac{Q - Q'}{Q + Q'} 100$$

dans laquelle E est la distance cherchée, Q et Q′ les poids obtenus par chaque double pesée.

En outre, la comparaison des poids Q et Q′ montre de quel côté se trouve le centre de gravité de la section par rapport à l'axe qui, pendant chaque double pesée, coïncidait avec le diamètre AB; car si, par exemple, Q est plus grand que Q′, cela veut dire évidemment que le centre de gravité était à gauche de AB

(du côté opposé au couteau), quand Q lui a fait équilibre. On a donc tous les éléments pour déterminer la position o du centre de gravité de la section génératrice, et par suite sa distance oo' à l'axe de révolution.

Désignant par S l'aire de la section génératrice, en décimètres carrés ; par R la distance de son centre de gravité à l'axe de révolution, en décimètres ; par P le poids du solide engendré, en kil. ; et par δ sa densité, on a d'après Guldin :

$$P = 2\pi R S \delta$$

Pour trouver la valeur de S, il faut d'abord connaître le poids d'une portion du même papier dont la surface soit exactement déterminée ; par exemple, un cercle d'un décimètre de diamètre. C'est une pesée une fois à faire, pourvu qu'on se serve toujours du même papier. Soient S′ la surface de ce cercle, p' son poids, et p celui de la surface S. L'épaisseur et la densité du papier étant les mêmes, de part et d'autre, on a la proportion

$$S : S' :: p : p'$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{p}{p'}$$

D'où, en observant que $S' = \frac{\pi}{4}$ décimètres carrés,

$$S = \frac{\pi}{4} \frac{p}{p'}$$

Comme p est égal à la moyenne $\frac{1}{2}(Q + Q')$ d'une double pesée, moyenne qui doit être la même pour les deux doubles pesées si l'opération a été bien faite, la valeur de S est entièrement déterminée (*). Substituant cette valeur dans l'expression du poids du solide, cette dernière devient

(*) On remarquera que si l'on veut simplement connaître l'aire d'une figure sans s'occuper de son centre de gravité, la balance ordinaire suffit, pourvu qu'elle soit assez sensible.

$$P = \frac{\pi^2 R \delta}{2} \frac{p}{p'}$$

$$P = 4 \cdot 935\, R \delta \frac{p}{p'}$$

Prenons maintenant pour exemple l'obus ogivo-cylindrique dont la section génératrice est représentée *Fig.* 8, et choisissons pour axes, *ab* génératrice de la surface cylindrique du projectile et *cd* perpendiculaire à l'axe de révolution *yz*. Le poids d'un cercle d'un décimètre de diamètre étant $p' = 3 \cdot 15$ grammes, les deux doubles pesées donnent pour la section génératrice du projectile :

ab sur AB... $\left\{ \begin{array}{ll} & \text{gr.} \\ Q = & 1 \cdot 72\ldots \text{ (l'axe de l'obus à gauche de AB.)} \\ Q' = & 1 \cdot 27 \end{array} \right.$

$Q - Q' = 0 \cdot 45$

$Q + Q' = 2 \cdot 99$

$p = 1 \cdot 495$

cd sur AB... $\left\{ \begin{array}{ll} Q = & 1 \cdot 495\ldots \text{ (la tête de l'obus à gauche de AB.)} \\ Q' = & 1 \cdot 495 \end{array} \right.$

$Q - Q' = 0 \cdot 00$

$Q + Q' = 2 \cdot 99$

$p = 1 \cdot 495$

La première double pesée fait voir que le centre de gravité de la section se trouve entre *ab* et *yz*, ce qui était du reste évident ; la seconde qu'il est sur la ligne *cd*. Effectuant les calculs, on trouve :

	mill	
E =	15·1	pour la première opération ;
E' =	0·0	pour la seconde.

Retranchant la première de ces valeurs du demi-diamètre de l'obus 47·5 mill., il reste 32·4 mill. ou 0·324 décimètres pour la valeur de R.

Le poids de la section est $p = 1 \cdot 495$ grammes, et la densité de la fonte est $\delta = 6 \cdot 95$. On a par conséquent pour le poids de l'obus :

$$P = 4 \cdot 935 \times 0 \cdot 524 \times 6 \cdot 95 \times \frac{1 \cdot 495}{3 \cdot 15}$$

$$P = 5^{k}\ 27.$$

La position du centre de gravité de la section par rapport à la ligne *cd* étant très-importante au point de vue du tracé du projectile que nous considérons, proposons-nous de la vérifier par une troisième double pesée ; et prenons pour axe *ef* parallèle à *cd*. Cette nouvelle opération donne :

gr.

ef sur AB... $\begin{cases} Q = 2 \cdot 23\ldots \text{ (la tête de l'obus à gauche de AB.)} \\ Q' = 0 \cdot 76 \end{cases}$

$$Q - Q' = 1 \cdot 47$$

$$Q + Q' = 2 \cdot 99$$

$$p = 1 \cdot 495$$

mill.

$$E'' = 49 \cdot 16$$

La distance entre les lignes *ef* et *cd* étant de 49 mill., on voit que, d'après la troisième double pesée, le centre de gravité se trouve à $0^{mill.}\ 16$ en avant de *cd*, tandis que d'après la deuxième, il est sur *cd* même. L'erreur probable n'est par conséquent que de $0^{mill.}\ 08$, et peut être négligée. Du reste, la différence serait encore plus petite, si les poids Q et Q' étaient exprimés en milligrammes.

Mais, dira-t-on, comment ferez-vous lorsqu'il y aura disproportion entre les dimensions du corps et celles de la balance ? La réponse est facile : si le corps est très-grand, on dessinera sa section génératrice à une échelle reduite ; s'il est très-petit on fera l'inverse. On obtiendra alors le poids du solide en multipliant celui du corps réduit ou amplifié par le cube de l'échelle renversée ; par exemple, par 8 si l'échelle est de $\frac{1}{2}$, par $\frac{1}{8}$ si l'échelle est de $\frac{2}{1}$. Que si l'on veut une approximation plus

grande, en ce qui concerne les corps de grande dimension, rien n'empêchera évidemment de faire une balance plus grande.

Nota. J'ai essayé deux espèces de papier Bristol, l'une avait $0^{mill}.3$ et l'autre $0^{mill}.4$ d'épaisseur. Le papier de $0^{mill}.3$ est préférable, parce qu'il est plus facile à découper, tout en ayant une consistance suffisante. — Les pesées doivent être poussées jusqu'au milligramme ; ce qui est toujours possible lorsque le fléau est pourvu d'un écrou mobile, au moyen duquel on peut à volonté augmenter sa sensibilité.

C. SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME.

Au point où nous en sommes, la solution générale du problème de la détermination du centre de gravité des corps est clairement indiquée. En effet, le corps étant de forme quelconque, si on le place sur le disque du fléau dans deux positions inverses par rapport à AB, et qu'on établisse chaque fois l'équilibre, comme on l'a fait précédemment, on connaîtra la distance du diamètre AB à un plan sécant perpendiculaire au fléau et contenant le centre de gravité. Une deuxième double pesée donnera la distance de AB à un deuxième plan sécant contenant aussi le centre de gravité. Enfin une troisième double pesée donnera un troisième plan sécant, et le centre de gravité du corps sera entièrement déterminé, si l'on a eu soin de choisir le troisième plan de manière qu'il n'ait qu'un point de commun avec les deux premiers. L'opération sera bien faite si les poids moyens obtenus par les trois doubles pesées sont égaux entre eux.

C'est principalement en vue de cette opération, que le fléau représenté *Fig.* 5 est muni d'une vis fixe et d'un écrou mobile. Plus le corps placé sur le disque est pesant, ou son centre de gravité élevé, plus il faudra faire descendre l'écrou mobile, pour ramener le centre de gravité du système (corps et fléau) au-dessous des points d'appui du couteau, et donner au fléau une sensibilité convenable. Au besoin, on se servira de plusieurs écrous, sauf à établir l'équilibre de la balance avant de placer le corps sur le disque.

E. TERSSEN.

Fig. 1.

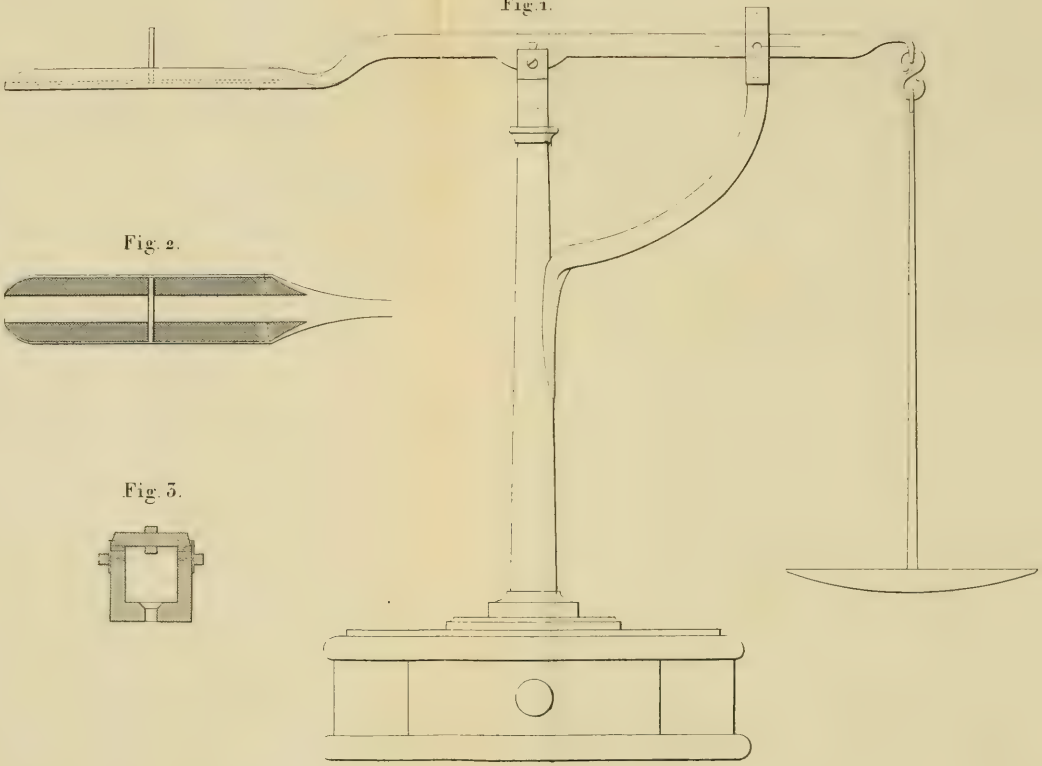


Fig. 2.

Fig. 3.

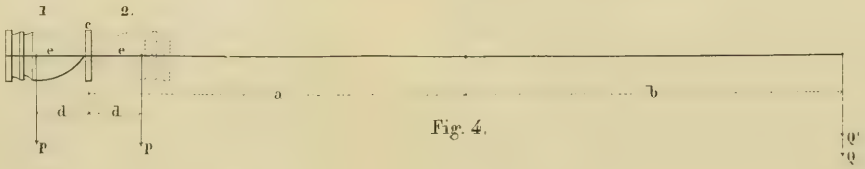


Fig. 4.

Echelle 1/10.

Etab. lith. de H. Dessain à Liége

Fig. 5.

Fig. 6.

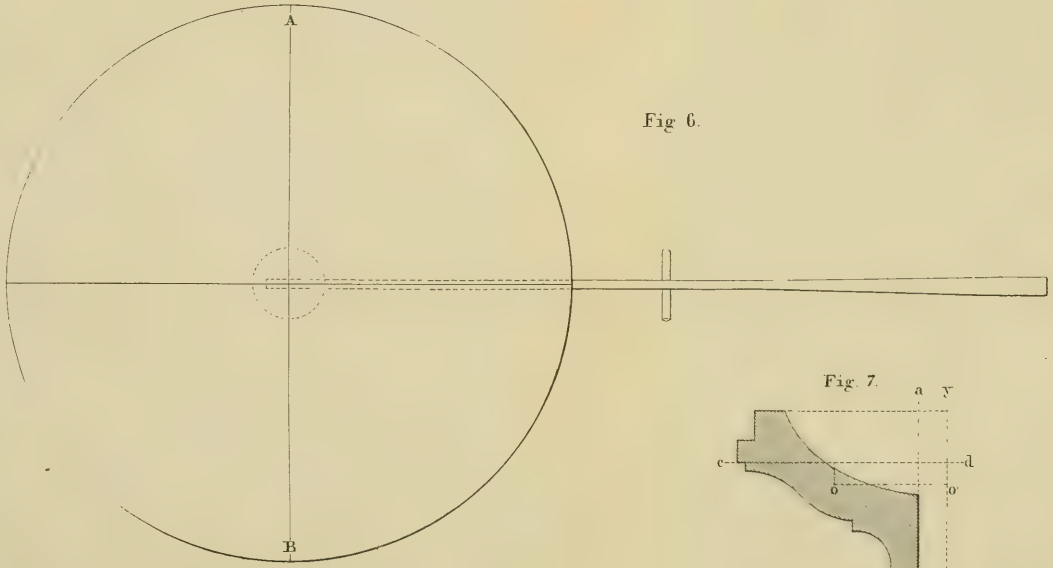


Fig. 7.

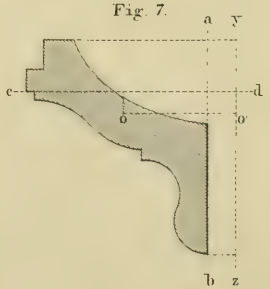
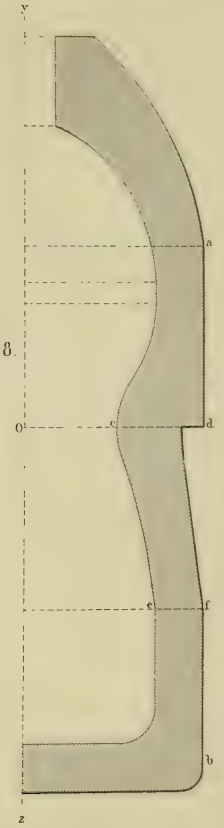


Fig. 8.



Echelle $\frac{6}{10}$ pour les Fig. 5, 6 et 8.

VII. — *Histoire des métamorphoses de quelques Coléoptères exotiques.*

PAR

M. E. CANDÈZE,

DOCTEUR EN MÉDECINE MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, ETC.

Depuis l'époque où M. Chapuis et moi avons publié le Catalogue des larves de coléoptères connues jusque-là, beaucoup d'observations nouvelles ont été faites sur les métamorphoses de ces insectes. Plusieurs de leurs larves ont été décrites avec soins, et des faits nouveaux et non moins intéressants sont venus s'ajouter à ceux que l'on connaissait déjà sur leurs mœurs.

Il est à remarquer cependant que, jusqu'ici, les études sur ce sujet ont porté presque exclusivement sur des espèces appartenant à l'Europe. Ceci s'explique facilement. Les naturalistes voyageurs, dans leurs pérégrinations à travers les forêts des pays tropicaux, se bornent à récolter le plus possible d'objets de collection généralement recherchés, et négligent les observations purement scientifiques, qu'ils ne pourraient faire du reste, on doit le reconnaître, qu'à grand'peine, en y employant beaucoup de temps et aux dépens du but principal qu'ils poursuivent. Il faut ajouter que ce genre d'étude nécessite un bagage spécial et fort incommode.

On est donc grandement redevable à ceux d'entre eux qui, placés dans de telles conditions, consacrent à ces observations un temps précieux, et surmontent des difficultés que connaissent seuls ceux qui se sont occupés de l'éducation des larves.

Le nombre des larves de coléoptères provenant des pays inter-

tropicaux actuellement décrites ne s'élève pas à soixante (1). Quels vastes et riches champs, encore inconnus, restent à exploiter dans ces régions favorisées, si nous en jugeons par les faits curieux que la faune européenne nous a déjà révélés ! Combien il serait à désirer qu'un observateur établi sur les lieux et animé de l'esprit des Réaumur, des De Geer, des Ratzebourg et des Perris, dirigea ses études dans cette voie presque inexplorée et pourtant si intéressante.

Grâce à l'obligeance de MM. Sallé et Nietner, j'offre aujourd'hui au public entomologique la description de quelques larves de la Louisiane, du Mexique, des Antilles, du Venezuela et de Ceylan. Ces messieurs ont joint à chaque espèce des spécimens de l'insecte à l'état parfait, et souvent de la nymphe, ce qui permet d'établir avec certitude leur authenticité. M. Sallé a bien voulu rédiger en outre, pour moi, les observations qu'il a faites sur la manière de vivre et l'époque de la transformation de la plupart d'entre elles. Tout le mérite des remarques qui accompagnent les descriptions suivantes appartient donc à ce zélé naturaliste. Je le prie de recevoir ici l'expression de ma reconnaissance. Je remercie également M. Nietner qui m'a spontanément offert les larves qu'il a recueillies à Ceylan. Il est vivement à désirer que cet entomologiste, habitant ce pays et à même par conséquent de faire des observations du plus haut intérêt sur les habitudes des espèces qu'il à sous les yeux, nous permette d'ajouter quelques chapitres à l'histoire des métamorphoses des insectes.

Je saisis l'occasion qui se présente par la publication de cette notice, pour prier les entomologistes, ceux surtout qui habitent les pays chauds, de recueillir des larves et de me les faire parvenir, ainsi que les remarques qu'ils seront à même de faire sur leurs mœurs.

(1) J'apprend que M. Westwood va publier prochainement un travail sur des larves exotiques.

CARABIQUES.

—

GALERITA NIGRA.

CHEVR. *Col. du Mexique*; Cent. II, fasc. 8.

LARVE.

(Pl. I, Fig. 1.)

Tête (fig. 1) assez courte, curvilinéairement rétrécie en arrière, portant quelques poils disséminés, déprimée en dessus, biimpressionnée ; présentant en avant, vers la ligne médiane, un prolongement grêle, cylindrique, blanchâtre avec l'extrémité brune, bifurqué dans sa moitié antérieure, chargé de quelques poils hérissés, courts, sans soies terminales. Chaperon et lèvre supérieure nuls.

Ocelles (fig. 16) placés latéralement derrière l'insertion des antennes sur une légère protubérance ; au nombre de six, disposés sur deux rangs, tous à peu près arrondis.

Antennes insérées sur les angles antérieurs de la tête qui forment une légère avance, à peu près deux fois aussi longues que la tête, entièrement hérissées de soies raides, composées de quatre articles : le premier cylindrique, très-long ; les suivants de la longueur, ensemble du premier, le deuxième et le troisième presque égaux, le dernier petit, obconique.

Mandibules grêles, arquées, munies d'une dent à la base.

Mâchoires libres; la pièce cardinale membraneuse, peu dégagée ; la pièce basilaire aussi longue que le premier article des antennes, cylindrique, courbe, portant à l'extrémité deux appendices articulés ; l'externe, le palpe, est composé de quatre articles dont le premier et le troisième courts, de même longueur, le second et le terminal longs, également de même taille ; l'appendice interne, représentant le lobe, composé de deux articles dont le second très-grêle ; toutes ces différentes pièces hérissées de poils.

Menton oblong, portant au sommet une pièce échancrée au milieu ; de chaque côté de l'échancrure, un palpe de deux

articles allongés ; au fond, sur la ligne médiane, un petit appendice charnu qui représente la languette.

Thorax composé de trois segments nettement séparés, protégés en dessus par des plaques cornées, la pronotale triangulairement allongée, arrondie aux angles, la seconde de moitié plus courte et plus large, la troisième encore plus courte et plus large, toutes marquées d'un sillon longitudinal, et de quelques impressions irrégulières sur les côtés.

Abdomen un peu élargi vers le milieu, composé de neuf segments, les huit premiers munis de plaques cornées, transversales, aussi bien en dessous qu'en dessus, les inférieures débordant un peu les supérieures, celles-ci épineuses latéralement, un peu rugueuses et impressionnées de chaque côté ; le segment terminal caché en dessus par le pénultième, muni de deux appendices filiformes de la longueur des deux tiers du corps et composés d'une douzaine d'articles.

Stigmates au nombre de neuf paires, ceux de la première à péritrème grand, ovale, oblique, visible en dessous, sur la membrane pro-mésothoracique, les autres sur les huit premiers segments de l'abdomen, visibles en dessus, petits, à péritrème arrondi.

Pattes longues, assez robustes, hérissées de poils fins, leurs hanches très-allongées et libres, les cuisses de la longueur des hanches ou à peu près, les jambes plus courtes et plus grêles, les tarses terminés chacun par deux crochets.

Cette larve, longue de dix-sept mill., non compris les appendices terminaux, est d'un brunâtre obscur, avec les pièces articulées de la tête et les pattes brun clair subtranslucide, les appendices terminaux flave blanchâtre. Le dessous est muni de poils noirs, clair-semés, le dessus est presque glabre.

Elle vit dans la terre. M. Sallé a trouvé l'exemplaire que j'ai sous les yeux, en juillet, à Cordova, au Mexique.

Les différences qu'elle présente avec celle de la *Galerita Lecontei* Dej., décrite pour la première fois par M. Sallé, puis plus tard, avec plus de détails, par M. Chapuis et moi, sont de peu d'importance et portent principalement sur la couleur. Je signalerai cependant la longueur moindre des appendices terminaux, qui sont en outre composés d'un moins grand nombre d'articles : ils sont au nombre de 25 à 26 chez la *G. Lecontei*.

GALERITA SIMPLEX.

CHAUD. *Bull. d. Mosc.* 1852, N° 1, p. 36.

Trouvée en juillet, dans les mêmes lieux que la précédente, elle n'en diffère que par les diverses pièces de la tête chargées de poils hérissés, plus longs. Tout le corps, y compris ces pièces, les pattes et les appendices terminaux, est d'un noir brun uniforme.

Les filets abdominaux sont cassés chez la seule larve que je possède, en sorte que je ne puis indiquer le nombre des articles qui les composent.

STAPHYLINIENS.

POEDERUS TEMPESTIVUS.

ERICHS. *Gener. et Spec. Staphyl.* p. 653.

LARVE.

(Pl. I, fig. 2.)

Tête (fig. 2^a, 2^b), cornée, un peu aplatie, en triangle curviligne, plus longue que large, a bouche dirigée en avant, la plaque supérieure s'avançant sur la ligne médiane en un lobe fortement quadridenté et qui paraît séparé du front par une suture (fig. 2^a).

Ocelles (fig. 2^c) au nombre de six, placés sur deux rangs et formant une petite saillie rectangulaire, très-distincte par sa couleur noire, sur la partie antérieure du bord latéral de la tête, derrière l'articulation des mandibules.

Antennes assez longues (fig. 2^d), de quatre articles, le premier court, les suivants à peu près de taille égale, le troisième subramifié, tous munis de quelques longs cils.

Mandibules falciformes, simples.

Mâchoires (fig. 2^e) insérées chacune latéralement sur une saillie oblongue du dessous de la tête, séparées de la lèvre inférieure par un large sillon, formées d'une pièce cardinale courte,

d'une pièce basilaire conique, charnue, dirigée obliquement en dedans et en avant, d'un palpe grêle, long, de quatre articles, dirigé en dehors; sans lobe distinct.

Menton (fig. 2[f]) en trapèze un peu allongé, portant au sommet une pièce palpigère très-courte, sur laquelle sont insérés une languette sétiforme et deux palpes grêles, biarticulés.

Thorax un peu plus large que la tête, le premier segment plus long que les deux suivants, tous trois protégés par des disques subcornés en dessus.

Abdomen atténué au sommet, composé de segments plus courts que ceux du thorax; le neuvième terminé par deux longs appendices étranglés de distance en distance, de façon à paraître formés de quatre pièces, portant quelques longs cils noirs (fig. 2[g]).

Pattes longues, grêles; les hanches longues, dirigées obliquement en arrière et en dedans; les jambes cilées, terminées par un crochet simple.

Stigmates normaux.

Cette larve est de consistance assez molle, revêtue de cils épars et noirs, offrant un système de coloration assez singulier et qui rappelle celui des *Pœderus* à l'état parfait : elle est brune, avec les deux tiers postérieurs de la tête et le mésothorax d'un blanc jaunâtre subtranslucide, le dessous et les pattes ainsi que les articulations des anneaux de l'abdomen en dessus sont de cette dernière couleur.

Insecte parfait.

Allongé, rouge avec la tête et les genoux noirs, les élytres bleues et les deux derniers segments de l'abdomen brunâtres, revêtu de poils épars, noirâtres. Tête forte, lisse, brillante, marquée en dessus de quelques points rares. Palpes et antennes rougeâtres, pubescents, ces dernières brunâtres dans leur partie moyenne. Prothorax bombé, rétréci en arrière, encore moins ponctué que la tête. Elytres en carré long, obliquement tronquées au bout, rugueusement ponctuées. Abdomen fortement rebordé. Long. 11 mill.

M. Sallé l'a trouvé, sous ces deux états, au bord d'une mare, à Cordova, en janvier.

(*Obs.*) Les larves des *Pœderus* sont, comme on le voit, formées d'après le type de celles des *Staphylinus*, c'est-à-dire qu'elles ont comme celles-ci une tête subtrigone, l'insertion des

antennes rapprochées, les mandibules simples, les mâchoires grêles et bien séparées du menton. Elles en diffèrent, entre autres, par le nombre des ocelles, l'absence de lobe aux mâchoires, etc., et peut-être par l'articulation du chaperon. Quant à ce dernier caractère je dois faire observer que l'exemplaire unique que j'ai sous les yeux n'est pas adulte, en sorte que les différentes pièces de la boîte céphalique peuvent ne pas avoir la connexion et l'immobilité définitives.

OSORIUS INTERMEDIUS.

Erichs. *Gen. et Spec. Staphyl.* p. 753.

LARVE.

(Pl. I, Fig. 3.)

Tête (fig. 3ª) cornée, orbiculaire, convexe en dessus, glabre, à bouche dirigée en avant, la partie antérieure distinctement articulée et cachant l'espace intermandibulaire en dessus et même les mandibules lorsque celles-ci sont au repos ; le bord le plus avancé de cette pièce crénelé.

Ocelles oblitérés, invisibles.

Antennes insérées à nu sur le disque supérieur de la tête, courtes, de quatre articles : le premier court et large, le second un peu plus long et plus grêle, le troisième deux fois comme le précédent, portant au sommet deux très-petits articles dont l'externe le plus long.

Mandibules courbes, arquées, fortement dentées au milieu, bifides au bout, cachées au repos.

Mâchoires libres, composées d'une pièce cardinale charnue, d'une pièce basilaire allongée, échancrée au milieu, extérieurement, pour recevoir un palpe de quatre articles et prolongée en un lobe falciforme denticulé en dedans.

Menton épais, en cône tronqué ; la pièce palpigère presque confondue avec lui, portant de chaque côté un palpe de deux articles ; la languette oblitérée.

Thorax plus étroit que la tête, composé de trois pièces presque égales, le prothorax seulement un peu plus long, de consistance à peine cornée en dessus.

Abdomen un peu élargi en arrière, de neuf segments peu

allongés, de consistance molle, le neuvième muni de deux appendices biarticulés, redressés, insérés à sa base (fig. 3ᵇ).

Stigmates normaux.

Pattes très-courtes, leurs hanches coniques.

Le corps de cette larve, qui est longue de dix millimètres, est subcylindrique, de consistance molle, de couleur brun verdâtre, subtranslucide, parsémé de poils longs et fins.

L'exemplaire unique que j'ai sous les yeux a été trouvé, par M. Sallé, à Cordova, au mois de novembre, sous des buches décomposées et fortement enfoncées en terre.

Insecte parfait.

Cylindrique, d'un noir brillant, à peu près glabre. Tête oblongue, forte, bombée, aplatie, ponctuée en avant. Antennes ferrugineuses, courtes. Prothorax à peine plus large que long, régulièrement atténué d'avant en arrière, éparsément et finement ponctué, rebordé latéralement. Elytres aussi longues que larges, marquées de quelques points épars, la strie suturale fine. Abdomen élargi d'avant en arrière, brusquement terminé en cône au sommet ou il porte quelques poils dorés. Pattes ferrugineuses, les tarses élargis. — Long. 10 mill.

Les larves d'*Osorius* sont déjà connues. M. Coquerel (1) a, le premier, figuré celle de l'*O. incisicrurus* Latr. de Madagascar; mais la description qu'il en donne est un peu brève. Plus récemment M. Kraatz (2) a publié les caractères de celle de l'*O. rugicollis* Kr., de Ceylan. En comparant l'espèce mexicaine avec cette dernière, je trouve quelques différences, par exemple dans la structure des mandibules, la présence d'une languette, celle d'un ocelle de chaque côté.

Pour ce qui est de la languette elle n'est, d'après le dessin de M. Kraatz, qu'une légère avance médiane non articulée de la pièce palpigère. La présence d'un ocelle n'a guère plus d'importance; nous verrons, à propos des larves de *Leptochirus*, que ces organes disparaissent chez la larve adulte. La seule différence notable consiste donc dans l'existence d'une dent médiane aux mandibules chez l'*O. intermedius*, dent qui est remplacée par des cils chez l'*O. rugicollis*.

(1) Annal. d. l. Soc. Entom. d. Fr. Ser. II, p. 180, pl. VII, nº 4, fig. 3.

(2) Arch. d. Wiegm. 1859, p. 167.

LEPTOCHIRUS SCORIACEUS.

GERM. *Spec. Ins. nov.* 35, 58, pl. I, fig. I.

LARVE.

(Pl. I, Fig. 4.)

Tête cornée (fig. 4^a), subarrondie, un peu convexe en dessus, à bouche dirigée directement en avant, portant quelques poils rares et longs, s'avançant sur la ligne médiane en un lobe visiblement mobile et représentant le chaperon et le labre confondus.

Ocelles petits mais très-distincts, au nombre de quatre de chaque côté, disposés obliquement sur une ligne droite derrière l'insertion des antennes, tous également espacés.

Antennes insérées à découvert vers les angles antérieurs de la plaque suscéphalique, aussi longues que celle-ci, filiformes, composées de quatre articles : le premier court et épais, le suivant allongé, glabre, le troisième aussi long, poilu, le dernier très-petit; près de son insertion, en dedans, on observe un petit article supplémentaire.

Mandibules courtes, arquées, bifides.

Mâchoires libres (fig. 4^b), articulées à une certaine distance de la lèvre inférieure, formées d'une pièce cardinale épaisse, charnue, d'une pièce basilaire échancrée au milieu de sa longueur pour recevoir un palpe de trois articles, et se prolongeant au-delà de l'insertion de ce palpe en un lobe corné, aplati, un peu courbe, acuminé, denticulé en dedans.

Menton épais, charnu, tronqué au sommet, portant une pièce palpigère trilobée, le lobe médian représentant la languette, les deux latéraux portant chacun un palpe de deux articles.

Thorax formé de trois segments à peu près égaux et de même forme, muni en dessus d'une plaque cornée en ovale transversal plus ou moins régulier, sillonnée au milieu, à surface inégale, parsemée de quelques poils longs et rares.

Abdomen de neuf segments; les huit premiers semblables entre eux et à ceux du thorax, seulement un peu plus courts, mais tous protégés par des plaques cornées; le neuvième plus petit, portant à son extrémité deux appendices filiformes d'une seule pièce, lesquels ont chacun cinq ou six longs poils. (fig. 4^c).

Stigmates au nombre de neuf paires, placés normalement ; les deux thoraciques grands, les seize abdominaux très-petits, visibles sur les côtés des plaques dorsales.

Pattes courtes, espacées ; les hanches très-courtes, coniques, les cuisses et les jambes de même longueur, celles-ci terminées par un ongle unique.

Corps linéaire, de 16 à 18 millimètres, entièrement brun avec les pattes d'une teinte plus claire, présentant quelques poils disséminés.

Trouvée en nombre, à Cordova, en novembre, sous des écorces d'arbres presque en décomposition.

Insecte parfait.

Aplati, noir, brillant. Front inerme, déprimé, marqué à la partie antérieure de deux fossettes transversales. Antennes de la longueur de la tête et du prothorax réunis, pubescentes. Prothorax subquadrangulaire, plus large que long, très-lisse, sillonné au milieu, largement échancré en avant. Elytres un peu plus longues que le prothorax et plus étroites, carrées, très-lisses, la strie suturale seule marquée. Abdomen cylindrique, de la longueur de la tête et du prothorax mais de moitié plus étroit, muni de poils disséminés, noirs, sur les côtés. Tarses un peu rougeâtres. — Long. 16-18 mill.

LEPTOCHIRUS MANDIBULARIS.

Kraatz., *Archiv d. Wiegm.* 1859, p. 189.

La larve de cette espèce a été parfaitement décrite et figurée par M. Kraatz (l. c.). Je la tiens également de M. Nietner, et il m'est possible de la comparer avec celle de l'espèce mexicaine qui précède.

Il n'y a aucune différence essentielle dans les parties de la bouche. Je remarque que tous les articles des antennes sont poilus tandis que dans la précédente tous, sauf le troisième, sont complètement glabres. Le corps de la larve est, du reste, généralement plus chargé de poils.

Une particularité que j'ai pu observer est l'oblitération complète des ocelles chez les larves qui ont atteint tout leur développement. Il m'a été impossible de les apercevoir chez plusieurs larves adultes,

mais je les ai très-bien distingués sur des larves plus jeunes. On doit les chercher sur les côtés, immédiatement derrière l'insertion des antennes, où ils forment, comme chez le *scoriaceus*, une rangée oblique de quatre petits points noirs (1).

(*Obs.*) Les larves des *Leptochirus*, comme on peut le voir par la description et encore mieux par la figure, ont beaucoup plus d'analogie avec celles des *Oxitélides* qu'avec celles des *Staphylinides*. Elles ont en effet, ainsi que les premiers, les mandibules dentées et bifides, la pièce cardinale des mâchoires plus épaisse, plus charnue, les antennes plus écartées, la tête plus arrondie, etc., tandis que les larves des seconds ont une tournure plus dégagée, la tête mieux armée et, sous ce rapport, se rapprochent davantage de celles des Carabiques.

HISTERIDES.

M. Perris, dans son remarquable travail sur les insectes qui attaquent le pin maritime (2), a décrit, avec le talent qui caractérise cet habile observateur, la larve d'un *Platysoma* de nos contrées, le *P. oblongum*. Cette larve est carnassière et vit dans les troncs des pins, aux dépens des Bostriches qu'elle poursuit dans leurs galeries. Son développement a lieu pendant l'été, et, vers le mois de septembre, elle se forme, dans le détritus du bois et au moyen d'une matière mucilagineuse, une loge elliptique, où elle procède à sa métamorphose.

Je possède, grâce à M. Nietner, plusieurs larves et une nymphe d'un grand *Platisoma* de Ceylan; je n'ai malheureusement aucuns renseignements sur la manière de vivre de cette espèce, mais il est à supposer qu'elle est semblable à celle du *P. oblongum*. J'ai suivi attentivement sur elle les détails descriptifs donnés par M. Perris pour la larve européenne, et j'ai

(1) On sait depuis longtemps que plusieurs larves ont des ocelles dans leur jeune âge et que ces organes disparaissent après quelques changements de peau.

(2) Ann. d. la Soc. entom. d. Fr. Sér. III, 1855-1856. Cette description avait déjà été donnée antérieurement par M. de Marseul, sur les notes manuscrites de M. Perris, dans l'excellente Monographie des Histérides dont la première partie a paru en 1853.

trouvé une identité parfaite en ce qui concerne la conformation des différentes parties de la bouche, celle des antennes, des pattes, des appendices terminaux et enfin la forme générale.

Je mentionnerai comme dissemblance spécifique, chez celle de Ceylan, d'abord une taille plus grande (17 mill.), puis la concavité très-prononcée de la tête en dessus, laquelle est plane chez l'*oblongum*. M. Perris dit que la larve de cette dernière a trois replis transversaux sur chaque segment de l'abdomen et des rangées de spinules dans les sillons formés par ces replis; je remarque la même disposition chez la mienne. Ces spinules sont assez saillantes pour être sensibles au toucher lorsqu'on passe le doigt sur le dos de la larve. De même que les replis, elles jouent sans doute ici le même rôle que les disques ventraux et dorsaux des larves de longicornes, c'est-à-dire qu'elles facilitent la progression de l'animal dans les canaux creusés par les Bostriches dont il fait sa proie. On comprend, du reste, que quand la larve a des galeries d'un très-petit calibre à parcourir, le jeu des pattes devient impossible ou tout au moins insuffisant, et que la marche doit alors s'accomplir comme chez les larves apodes placées dans les mêmes conditions, c'est-à-dire par des mouvements vermiculaires.

L'espèce dont cette larve est le premier état est un *Platysoma* de taille grande pour le genre. J'ai cherché en vain à le rapporter à l'une des espèces indiennes décrites et figurées par M. de Marseul. Je n'en ai pas non plus trouvé la diagnose dans les opuscules sur les insectes de Ceylan de MM. de Motschoulski (1) et Walker (2). En conséquence je crois pouvoir la décrire comme espèce nouvelle, en la dédiant au savant auteur de la Monographie de la famille.

PLATYSOMA MARSEULII.

(Pl. I, fig. 5.)

En carré oblong, assez déprimé, noir luisant. Antennes à massue grisâtre. Tête profondément excavée, l'épistome séparé du front par une fine ligne transversale sinuée à l'angle oculaire. Pronotum une demi fois plus large que long, un peu rétréci au

(1) Etudes entomologiques, VII, 1858.

(2) Ann. and Mag. of Nat. Histor. 1858.

sommet, échancré en avant avec ses angles antérieurs arrondis, la strie latérale bien marquée, non interrompue au bord antérieur. Ecusson petit et triangulaire. Elytres plus longues que le pronotum, de même largeur à la base, curvilinéairement rétrécies dans leur moitié postérieure, tronquées transversalement au sommet, marquées en dessus d'une strie humérale très-fine, oblique, de six stries dorsales dont les trois externes entières, les trois internes oblitérées dans la moitié antérieure. Pygidium et propygidium inclinés, marqués densément de points ocellés, le premier rebordé. Pattes rouge obscur ; jambes antérieures armées de cinq épines, intermédiaires et postérieures de quatre. — Long. 7 mill., larg. 3 ½ mill.

Les caractères distinctifs de cette espèce consistent surtout dans l'armature des jambes, l'intégrité du sillon du pronotum et surtout la disposition des stries des élytres. C'est l'une des plus grandes du genre.

NITIDULAIRES.

AMPHICROSSUS DISCOLOR.

Erichs. in Germ. *Zeitschr.* IV, p. 348.

LARVE

(Pl. I, fig. 6.)

Tête petite (fig. 6ª), en ovale transversal, un peu avancée au milieu, aplatie en dessus, cornée, marquée de diverses impressions dont deux plus profondes et longitudinales, chargée de petites granulations plus serrées dans certaines places, les bords latéraux denticulés, son bord antérieur arrondi, séparé du labre par un léger repli ; sans chaperon distinct.

Ocelles au nombre de deux de chaque côté (1), portés cha-

(1) Ces deux ocelles portés sur des pédicules sont aisés à voir, mais il y en a peut-être d'autres, sessiles, qui sont alors perdus dans les granulations de la tête et difficiles à reconnaitre.

cun sur une sorte de pédicule, placés en arrière de la fossette antennaire.

Antennes courtes, de quatre articles ; le premier gros, le suivant de même longueur mais beaucoup plus étroit, le troisième deux fois plus long, le quatrième très-court et très-grêle.

Labre court, transversal, bilobé, les lobes cornés, le reste membraneux et subtranslucide.

Mandibules (fig. 6^{d}) lamelleuses, munies extérieurement d'un rebord corné qui leur donne de la solidité, et, vers le milieu, d'une apophyse également cornée, leur pointe obliquement tronquée, leur bord interne d'abord concave, en partant de la pointe, puis formant une large expension translucide, dentée en scie sur les bords.

Mâchoires charnues ; soudées en grande partie au menton, la pièce basilaire et la pièce cardinale à peine distinctement séparées par un fin sillon oblique, munies d'un lobe arrondi et fortement cilié en dedans, faisant corps avec elles ; les palpes maxillaires dirigés en dehors, de quatre articles.

Lèvre inférieure formée d'un menton allongé, portant une pièce palpigère profondément échancrée et des palpes de deux articles de même longueur.

Segments thoraciques et abdominaux de mêmes forme et consistance, le prothorax un peu plus long et inerme, les autres munis latéralement de spinules formant un petit groupe de chaque côté et six courtes rangées longitudinales sur le disque ; le dernier segment court (fig. 6^{c}) constitué presque en entier par deux épines rugueuses et poilues, portant en dessous un anus tubuleux.

Stigmates en nombre normal et placés comme d'habitude, mais offrant cette particularité que le péritrème, qui est extrêmement petit, est situé à l'extrémité d'une tige charnue et d'autant plus longue qu'elle est plus voisine de l'extrémité (fig. 6^{d}).

Pattes courtes, formées d'une hanche épaisse, charnue, d'un trochanter très-petit, d'une cuisse et d'une jambe de même longueur, enfin d'un crochet simple.

Corps long de huit millimètres, un peu élargi au milieu, brunâtre mat, avec la tête, les spinules et les épines terminales brun noir.

En comparant cette description avec celle qu'Erichson a donnée de la larve de la *Soronia grisea*, je remarque d'abord une grande

analogie dans la conformation toute particulière des mandibules, puis quelques différences notables.

En premier lieu le nombre des articles des antennes est ici de quatre, bien distincts, que j'ai pu compter avec la plus grande facilité sur plusieurs individus, car la ligne de démarcation de chacun d'eux est très-nettement marquée. Chez la *Soronia grisea* il n'y a que deux articles avec une soie terminale qui figurerait un troisième.

Une autre différence plus importante est la position des stigmates. Selon Erichson, ces ouvertures existeraient en arrière des prolongements charnus que porte la larve sur les côtés. J'ai observé ici les mêmes prolongements charnus, mais c'est en vain que j'ai cherché les stigmates dans leur voisinage. Après un examen très-attentif, sur plusieurs larves, et en employant les verres les plus grossissant, je suis resté convaincu que le petit enfoncement cerclé de noir que présentait l'extrémité de chaque appendice n'était autre que l'ouverture respiratoire elle-même. Ce qui m'a surtout décidé à adopter cette manière de voir, c'est que ces prolongements sont au nombre et à la place habituels des stigmates, c'est-à-dire au nombre de neuf de chaque côté, huit sur les huit premiers segments de l'abdomen et le neuvième, sur un plan inférieur, dans le pli qui sépare le prothorax du mésothorax; ce dernier, exactement de la même nature que ceux de l'abdomen. Il n'y en a aucune trace sur les trois segments thoraciques.

Les larves d'un genre de la même famille, les *Rhizophagus*, offrent au reste une disposition des stigmates qui se rapproche beaucoup de celle-ci.

Insecte parfait.

Arrondi, bombé, d'un noir brunâtre, couvert d'une ponctuation régulière, médiocrement dense et assez fine, revêtu d'une pubescence d'un brun obscur, bordé tout autour, sauf la tête, de poils assez longs qui forment une frange ferrugineuse. Prothorax transversal, fortement échancré pour recevoir la tête, son bord postérieur faiblement sinueux. Elytres atténuées en arrière, tronquées au bout, laissant à découvert les deux derniers segments de l'abdomen. Pattes d'un brun ferrugineux. — Long. 5 mill., larg. 4 mill.

Je l'ai reçu de Ceylan.

LORDITES GLABRICULA.

Murray, in litt.

On sait que M. Murray est à la veille de publier un grand ouvrage sur les nitidulaires, et qu'il a réuni, dans ce but, de nombreux matériaux.

Dans le nombre il possède une larve d'une espèce inédite de *Lordites* de Ceylan, qu'il a eu l'obligeance de me confier, avec l'insecte parfait, en m'autorisant à les décrire.

Cette intéressante communication m'est parvenue au moment de livrer à l'impression les pages qui précèdent. J'ai saisi avec empressement l'occasion qui s'offrait à moi de reconnaître la position des stigmates et de comparer, sous ce rapport, les deux espèces. Or je me suis assuré que, chez la *Lordites*, les ouvertures respiratoires existent au sommet des prolongements charnus des côtés du corps, absolument comme chez l'*Amphicrossus discolor*.

N'ayant à ma disposition qu'un spécimen dont je devais respecter l'intégrité, je n'ai pu étudier, des parties de la bouche, que ce qui paraissait à l'extérieur ; la dent basilaire des mandibules m'est donc restée inconnue. Quant aux mâchoires, à la lèvre inférieure, aux antennes, elles sont faites sur le même modèle que chez la précédente.

La tête est lisse avec deux fortes impressions longitudinales sur le dessus. Les ocelles, au nombre de quatre de chaque côté, sont disposés en quadrilatère derrière le point d'insertion des antennes. Ils sont sessiles, assez gros, très-visibles.

Le prothorax seul est protégé par un écusson corné, divisé longitudinalement au milieu et marqué de quatre impressions rugueuses, arrondies. Les autres segments ne présentent que deux points cornés, rapprochés sur le dos et surmontés de deux ou trois épines, très-courtes sur les premiers, de plus en plus fortes vers l'extrémité, ramifiées sur le huitième. Le neuvième segment porte un mamelon carré, dont les angles se prolongent (pl. III, fig. 6) en quatre épines redressées ; les deux épines postérieures plus longues et à pointe un peu recourbée en avant. Les stigmates s'ouvrent, comme je viens de le dire, à l'extré-

mité de mamelons ou plutôt de tubes charnus, placés, les deux premiers sur la membrane qui unit le prothorax au mésothorax, les seize autres sur les parties latérales des huit premiers segments abdominaux. Les tubes de plus en plus longs à mesure qu'ils se rapprochent du segment terminal. Les péritrèmes arrondis et beaucoup plus grands que chez l'*Amphicrossus discolor*.

Pattes et mamelon anal comme chez la précédente.

Le corps de cette larve est long de huit millimètres sur un et demi de large. Il s'élargit un peu vers le milieu de l'abdomen. Les téguments sont membraneux ; cependant on reconnaît très-bien la limite de chaque segment. La couleur est d'un blanc jaunâtre pâle avec l'extrémité des mandibules, les écussons, points cornés et épines du dos, ainsi que les péritrèmes des stigmates noirs ou brunâtres.

Insecte parfait.

Peu convexe, ovale, brunâtre mat, les élytres d'un testacé obscur, plus clair vers le milieu, parsemées de petites taches noirâtres dont une plus grande vers le tiers postérieur ; revêtu de poils rigides, couchés, clair-semés, jaunâtres. Tête et prothorax densément et assez fortement ponctués. Elytres marquées de points moins denses, faiblement sillonnées avec les intervalles subcostiformes. Dessous et pattes brunâtres ; la seconde moitié des cuisses jaune. — Long. 6 mill., larg. 3 ½ mill.

Ceylan.

CUCUJIPES.

BRONTES SERRICOLLIS.

La larve du *Brontes planatus* a déjà été décrite par Erichson (1) d'abord, puis ensuite avec beaucoup de soin par M. Perris,

(1) Naturg. d. Ins. Deutschl. 1846, p. 332.

dans son grand travail sur les insectes qui attaquent le Pin maritime. Je possède un assez grand nombre de spécimens d'une espèce inédite de Ceylan, sous ses différents états.

En comparant les deux espèces, je ne trouve que des différences de détail peu importantes et qui méritent à peine d'être mentionnées.

Les parties de la bouche sont les mêmes. Les ocelles sont au nombre de cinq de chaque côté et disposés de la manière suivante : quatre, très-rapprochés, sur une ligne transversale, un en arrière ; ils forment un petit groupe derrière les antennes, sur les côtés de la tête, et comme ils sont de la couleur des téguments on ne les aperçoit que très-difficilement, par la saillie légère qu'ils font.

Les antennes sont plus longues que chez le *planatus;* je n'ai pu apercevoir les deux petits articles appendiculaires qui sont logés dans une échancrure oblique du sommet du second article chez ce dernier. La lèvre supérieure est grande, semi-elliptique, bien limitée par un repli saillant.

Le corps (pl. II, fig. 1) est mou et blanchâtre ; les disques dorsaux de l'abdomen, à peine cornés, offrent de chaque côté une petite saillie qui se transforme peu à peu en épine aux derniers segments. Cette épine, longue au huitième arceau, est située à l'angle postérieur et dirigée en arrière. Le neuvième est armé de deux épines (pl. II, fig. 1) encore plus longues, qui ne paraissent pas articulées.

Nymphe.

(Pl. II, fig. 1[a].)

Blanche, molle, déprimée, la tête longue, repliée sur le sternum, portant trois cils de chaque côté sur autant de mamelons, séparée du prothorax par une rangée de petites spinules qui forment une légère crête à la partie tout-à-fait supérieure. Antennes à premier article s'écartant presque perpendiculaire-

ment de la tête, le reste de l'organe descendant obliquement le long du corps, passant entre les cuisses moyennes et postérieures pour venir s'appliquer contre la face inférieure de l'abdomen où elles atteignent l'avant dernier segment. Prothorax carré, chaque bord latéral portant trois cils comme ceux de la tête. Ailes courtes, obliques, appuyées sur la face dorsale des cuisses qui les débordent. Abdomen grêle, subépineux de chaque côté, portant au bout la dépouille de la larve. Cuisses antérieures et moyennes portant au milieu de leur face externe un long cil.

Insecte parfait.

(Pl. II, fig. 1e).

Tout-à-fait plat en dessus, brun, pubescent. Front subgranuleux, échancré de chaque côté pour l'insertion des antennes, impressionné au niveau de cette échancrure ; yeux globuleux, latéraux, leur base cachée par un rebord du front. Antennes aussi longues que le corps, finement velues, leur premier article très-long, le second court, le troisième égal aux suivants. Prothorax à peu près carré, crenelé sur les côtés, subgranuleux. Ecusson transversal. Elytres parallèles, trois fois et demie plus longues que le prothorax, granuleuses, faiblement striées, présentant une carène le long de leur bord externe. Pattes ferrugineuses. — Long. 8 mill.

Ceylan.

Il est voisin du *B. spinicollis* Guér. ; mais chez ce dernier les bords latéraux du prothorax n'ont que cinq épines de chaque côté, tandis qu'ici ils sont denticulés et les petites dents sont au nombre d'une douzaine.

PECTINICORNES.

PASSALIDES.

On possède déjà la description de trois larves de *Passalus*.

On sait que ces larves se reconnaissent de suite à un caractère fort remarquable et qui consiste dans l'atrophie à peu près com-

plète de la troisième paire de pattes, laquelle n'est plus représentée que par deux petits appendices tout-à-fait inutiles à l'animal. Elles se distinguent encore des Lamellicornes par leurs antennes de deux articles, les anneaux de l'abdomen non divisés en bourrelets, etc.

J'ai sous les yeux les larves de quatre autres espèces de ce genre, dont trois américaines et une asiatique. Dans ce nombre il s'en trouve une dont l'insecte parfait appartient à la seconde division des Passalides décrits dans la Monographie de Percheron, c'est-à-dire qu'il a les antennes pentaphylles; c'est la troisième espèce de celles dont les noms suivent :

P. interruptus L. de Caracas.
P. mucronatus Burm. id.
P. Leachii M. L. de Nicaragua.
P. bicolor F. de Ceylan.

Examinées attentivement, elles m'ont paru parfaitement semblables entre elles sous le rapport de la structure des différentes pièces du corps, et c'est en vain même que j'ai cherché quelque caractère secondaire qui put les distinguer spécifiquement.

A part la taille je n'ai rien trouvé qui vaille la peine d'être mentionné. On peut donc en conclure que la description d'une larve de *Passalus* convient à toutes.

Je ne puis que confirmer la description que nous avons donnée, M. Chapuis et moi de la larve du *P. distinctus* (1), sauf en ce qui concerne les mandibules, indiquées comme bidentées à l'extrémité. Dans les quatre espèces que je possède actuellement, ces organes sont tridentés au bout. Cette rectification faite, la formule du *distinctus* leur convient parfaitement.

Une particularité que nous avons oublié de mentionner est l'existence, sur les parties latérales du cou, en dessous, de deux mamelons charnus, terminés en pointe mousse.

Je ferai encore observer que la position de la première paire de stigmates n'est pas absolument invariable : dans l'*interruptus* elle est placée à la base des parties latérales du prothorax, comme chez le *distinctus*. Dans le *Leachii* elle se rapproche du pli qui sépare le prothorax du segment suivant ; enfin dans les deux autres espèces les stigmates sont sur le pli même.

(1) Mém. d. l. Soc. roy. des Sc. d. Liége, VIII, p. 467.

LAMELLICORNES.

CANTHON VOLVENS.

FABR. *Syst. Eleuth.* I, p. 60.

LARVE.

(Pl. II, Fig. 2.)

Tête de grandeur médiocre, aplatie en dessus, impressionnée sur le disque, tronquée en avant avec deux légères sinuosités latérales au niveau des fossettes antennaires, à bouche dirigée en bas.

Antennes plus courtes que la tête (fig. 2^e), insérées comme d'habitude en dehors des mandibules, composées de cinq articles, le basilaire court et large, le second le plus long, les deux suivants à peu près égaux en longueur, le quatrième pyriforme, inséré par son extrémité amincie et portant un petit article sur la partie externe de son bout épaissi.

Chaperon trapézoidal, bien séparé du front par un sillon profond.

Labre transversal (fig. 2^a), trilobé, cilié sur son bord libre, aplati extérieurement, présentant sur sa face intérieure une sorte d'anneau formé par une rangée circulaire de cils dorés, très-serrés, implantés sur un repli des téguments.

Mandibules assez longues, convexes extérieurement, tridentées obtusément au bout, excavées inférieurement en dedans (fig. 2^c), avec les bords de l'excavation festonnés.

Mâchoires de forme ordinaire quant à la base, munies au sommet de deux lobes bien distinct, l'interne, invisible dans la position naturelle des organes, spiniforme, corné avec la base renflée, charnue et fortement ciliée, l'externe entièrement charnu, obtus au sommet, chargé de cils raides et dorés (fig. 2^b). Palpes maxillaires de quatre articles.

Lèvre inférieure formée d'un menton transversalement subrectangulaire, d'une pièce palpigère à deux lobes ciliés comme

ceux des mâchoires, et portant des palpes de deux articles (fig. 2^b).

Thorax un peu plus étroit que l'abdomen; ses segments, quant au reste, semblables à ceux de ce dernier, c'est-à-dire séparés par un sillon fin. Chaque segment portant en outre quelques stries. Le dernier de grosseur médiocre, portant au bout la fente anale transversale.

Stigmates normaux.

Pattes assez courtes, de même longueur, la séparation de leurs articles indiquée seulement par des étranglements; sans crochets.

Le corps de cette larve est glabre, d'un blanchâtre sâle subtranslucide, avec la tête et deux plaques à demi cornées sur le prothorax, d'un jaune ferrugineux, les mandibules et le labre noirs.

Nymphe.

(Pl. II, Fig. $2^{e,f}$).

Ovoïde, un peu déprimée, blanc jaunâtre, molle, La face dorsale présentant trois parties distinctes : le pronotum qui occupe tout le tiers antérieur, les ailes qui s'écartent obliquement pour se replier en dessous, enfin l'abdomen terminé en pointe, ses quatre premiers segments présentant chacun trois saillies acuminées, spiniformes, deux latérales, une médiane. Sur la face ventrale : le chaperon dirigé en avant, ainsi que les pattes antérieures, protégeant entre eux les antennes, une grande plaque lisse, médiane, qui est le métasternum; le reste comme chez les autres nymphes de lamellicornes.

L'insecte parfait est bien connu.

Ce copride est commun aux environs de la Nouvelle-Orléans; au printemps et en été les mâles et les femelles fabriquent ensemble de petites masses sphériques de matière stercorale, de la grosseur d'une noisette. A mesure qu'une de ces boules est formée, la femelle dépose un œuf sur sa surface, puis tous deux la roulent de façon à la revêtir d'une croute terreuse. Ils la conduisent ainsi jusqu'à ce qu'ils rencontrent une excavation dans le sol, une touffe d'herbes, un morceau de bois, en un

mot un lieu quelconque où leur ouvrage soit à l'abri, puis ils vont procéder à une nouvelle fabrication. La jeune larve éclôt; elle grandit grâce à la provision qui lui a été ménagée, et quand elle l'a épuisée elle se change en nymphe, protégée alors par la coque terreuse qui revêtait son magasin de vivres. La transformation achevée, elle se dégage en brisant son enveloppe.

ANCYLONYCHA FUSCA.

Frölich, *Naturf.* 26. 99, (1792); pl, 3, fig. 3. (Lec.)

(*A. Quercina.* Knoch, Burm.)

LARVE.

(Pl. II, Fig. 3).

Tête de grandeur moyenne, convexe en dessus, en demi cercle, à partie inférieure tronquée carrément pour recevoir l'insertion des différentes pièces de la bouche et les antennes.

Antennes insérées sur les côtés de la tête, dépassant l'extrémité des mandibules, assez grêles, de cinq articles : le premier court et épais, le second plus long et plus mince, le troisième le plus long de tous, le quatrième de la longueur du second, muni à l'extrémité d'une petite dent en dedans de l'insertion du cinquième ; ce dernier fusiforme.

Chaperon grand, trapézoidal.

Lèvre supérieure aussi haute que le chaperon, un peu moins large, en ovale transversal, sa surface inégale en dessus.

Mandibules (fig. 3^c) longues, légèrement arquées, coupées obliquement au sommet, leur face externe longitudinalement bicarénée dans la partie moyenne et basilaire, faiblement bisillonnée au bout ; leur base munie en dedans d'une molaire très-saillante, excavée, festonnée sur les bords.

Mâchoires (fig. 3^b) formées d'une pièce cardinale et d'une pièce basilaire charnues ; leur lobe se continuant avec cette dernière, formé d'une seule pièce, muni d'épines au sommet et de poils sur la face interne. Palpes de quatre articles, le second plus long que les autres.

Lèvre inférieure (fig. 3^b) composée d'un menton large, en

trapèze, portant une pièce palpigère grosse, charnue, transversalement sillonnée en dessous de l'insertion des palpes, poilue en avant et en dedans. Palpes labiaux biarticulés.

Thorax, abdomen, stigmates et pattes comme ceux des *Melolontha*.

Le corps de cette larve est d'un gris sâle, revêtu de poils fauves plus denses sur les segments antérieurs et l'extrémité du sac et offrant, sur les replis des six premiers segments abdominaux, des séries transversales de petits points noirs qui, examinés à la loupe, apparaissent sous la forme de spinules redressées. La tête et les pattes sont d'un jaune ferrugineux.

Elle vit dans la terre. L'insecte vole le soir depuis mars jusqu'en juillet. Pendant le jour il se tient caché sous les buches, les troncs d'arbres renversés, etc.

SERICA NITIDA.

(Pl. II, Fig. 4).

La larve de cette espèce ne diffère de la précédente que par les particularités suivantes :

Le quatrième article des antennes porte à l'extrémité, en dedans de l'insertion du cinquième, une petite saillie un peu plus prononcée.

Le chaperon (fig. 4^a) est de même forme avec son bord antérieur déprimé ; le labre est grand, transversal, avec son bord antérieur avancé ; il présente une carène qui le traverse dans toute sa largeur, et, en avant de cette carène, de chaque côté, une courte impression oblique.

Les mandibules (fig. 4^b) sont plus allongées et moins larges au sommet où elles présentent, sur la face externe, un seul sillon ; la molaire est moins épaisse et les festons du bord font moins de saillie.

Quant aux mâchoires et à la lèvre inférieure elles sont tout-à-fait semblables. Les premières ont également un seul lobe soudé, charnu, biépineux et cilié au sommet ; la seconde est aussi dépourvue de languette.

Le corps est de même couleur, un peu moins renflé à l'extrémité.

Insecte parfait.

(Pl. II, Fig. 4.)

En ovale un peu élargi en arrière, très-lisse, d'un brun rougeâtre brillant. Front marqué de points inégaux médiocrement denses; derrière le rebord antérieur on en remarque une rangée transversale de cinq ou six plus gros. Prothorax transversal, faiblement arqué et muni de quelques longs cils sur les côtés, sa surface convexe, finement et éparsément ponctuée. Ecusson triangulaire, marqué de quelques points. Elytres faiblement sillonnées, avec une rangée de points serrés au fond des sillons, les intervalles à peine convexe et marqués de quelques points rares et fins. Dessous rougeâtre, mat. — Long. 11-12 mill., larg. 6-7 mill.

Ceylan.

Cette espèce appartient aux *Serica* de la seconde division de M. Burmeister (*Handb.* IV, part. II, p. 171). Les antennes ont neuf articles et la massue quatre feuillets; le premier de ceux-ci de moitié plus court que les autres.

ÉLATÉRIDES.

J'ai reçu, de M. Nietner, les larves de deux espèces d'Elatérides de grande taille, originaires de Ceylan. L'une, sans nom, a la plus grande analogie avec les larves d'*Alaus* et est peut-être celle de l'*A. speciosus*. L'autre espèce, dont je possède trois exemplaires, est étiquetée : *Campsosternus Templetonii*.

Ces larves sont extrêmement curieuses et s'éloignent, par les détails de leur conformation, des autres larves connues d'Elatérides, bien que la forme générale et la structure caractéristique des mâchoires ne laissent aucun doute sur l'exactitude de la détermination.

J'hésite d'autant moins à me fier à celle-ci que l'on possède un autre exemple de larves de la même famille qui s'écartent

aussi, notablement, du type, par plusieurs particularités que je retrouve dans les miennes : ce sont les larves de *Cryptohypnus*, observées et soigneusement décrites (1) par M. Perris.

Voici les caractères de cette espèce, j'indiquerai ensuite en quoi elle se sépare nettement de toutes celles que l'on connaît jusqu'ici.

LARVE.

(Pl. II, Fig. 5.)

Tête petite, très-inclinée, cornée, bombée en dessus, arrondie sur les côtés, à demi enchassée dans le prothorax, fortement, éparsément et irrégulièrement ponctuée avec quelques rides longitudinales vers la base, son bord antérieur largement et régulièrement concave, donnant attache, par un bourrelet submembraneux qui tient lieu de chaperon, à un labre transversal, corné, solide, fortement quadridenté en avant.

Un ocelle assez grand, arrondi, bien limité, un peu bombé, tranchant par sa couleur blanchâtre translucide sur le noir des téguments, situé sur le rebord antérieur et latéral de la boîte céphalique, tout près de l'antenne.

Antennes courtes, coniques, rétractiles, de quatre articles, protégées par une excavation latérale des mandibules.

Mandibules (fig. 5^{f}) assez robustes, solides, en forme de cuillère, fortement quadridentées sur les bords, présentant sur leur face externe une large excavation triangulaire où sont logées les antennes, leur face interne concave.

Mâchoires (fig. 5^{d}) et menton soudés ensemble, les pièces basilaires grandes, surmontées en dedans, chacune, d'un lobe court qui fait corps avec elle et se prolonge, vers la cavité buccale, en une lame fortement ciliée qui représente le lobe interne, et, en dehors, d'un palpe court, conique, de quatre articles. Lèvre inférieure triangulaire, enchassée entre les pièces basilaires des mâchoires avec lesquelles elle fait corps, ne s'en distinguant que par un sillon ; la pièce palpigère transversale, échancrée au milieu, portant deux palpes biarticulés et une languette épaisse, cornée, très-dure, en forme de dent molaire triangulaire, à bord interne bisinué (fig. 5^{d})

(1) Mém. d. l. Soc. d. Sc. d. Liége X, p. 236.

Thorax de trois pièces, la première un peu plus longue.

Abdomen de neuf segments; les huit premiers à peu près égaux entre eux, plus longs que larges, le neuvième en forme de disque un peu bombé, enchassé dans une ouverture circulaire du précédent et s'ouvrant (fig. $5^{h,i}$) comme le couvercle d'une tabatière pour montrer l'ouverture anale qui, autrement, est complètement cachée.

Stigmates au nombre de six paires situés sur les segments 2-7 de l'abdomen, la paire placée ordinairement vers le bord antérieur du mésothorax ou sur la membrane qui unit celui-ci au prothorax tout-à-fait nulle, ainsi que celle du huitième segment abdominal, le premier segment après le thorax ne présentant à la place des stigmates que deux petites fossettes sans trace d'ouverture au fond; péritrèmes de ceux qui existent grands, triangulaires.

Pattes (fig. 5^{g}) extrêmement courtes, contiguës, insérées par paires sur une sorte de mamelon commun; composées, comme chez les autres, de cinq pièces.

Le corps de cette larve est long de 55 à 60 millimètres, d'un noir brunâtre très-luisant, glabre, cylindrique, un peu étranglé aux articulations; tous les anneaux présentent de petites stries transversales de points; le prothorax et le huitième abdominal sont plus fortement ponctués; l'opercule terminal est ponctué-rugueux. Les stigmates, très-grands, se voient sur la face dorsale. Les segments de l'abdomen, sauf le neuvième, offrent latéralement, en dessous des stigmates chez ceux qui en portent, une impression transversale au fond de laquelle on observe de petits replis longitudinaux. Les segments thoraciques, sauf le premier, ont cette impression en double. On remarque en outre, sur les segments antérieurs de l'abdomen, plus bas encore que l'impression, une très-petite fossette à fond lisse, rebordée. Ces fossettes vont en s'oblitérant à mesure qu'elles se rapprochent de l'extrémité.

Les *Campsosternus* présentent, comme on vient de le voir, sous leur première forme, des particularités qui n'ont encore été observées chez aucune larve d'Elatéride. La plus importante est, sans contredit, la réduction, à six paires, des ouvertures respiratoires. S'il s'agissait d'une larve de petite taille on pourrait croire que les ouvertures en question m'ont échappé, mais cette objection tombe ici devant l'extrême facilité que l'on a d'aper-

cevoir, à l'œil nu, les stigmates existants. Je regrette de n'avoir aucun renseignement sur les habitudes de cette larve ou seulement le milieu dans lequel elle vit ; on aurait peut-être l'explication de cette anomalie.

La forme du neuvième segment abdominal réduit à un simple disque sans la moindre épine, la façon dont il se meut, comme s'il était articulé par une charnière avec le précédent dans lequel il s'enchasse, protégeant ainsi, en le dissimulant, l'orifice anal, font supposer un genre de vie à part. La grande brièveté et la rétractilité des antennes et des palpes, l'insignifiance des pattes qui doivent être à peu près inutiles à l'animal, la dureté et le poli des téguments qui n'offrent de prise nulle part, tout cela réuni ne semble-t-il pas indiquer que notre larve est, par son genre de vie, en contact fréquent avec des ennemis contre les injures desquels elle doit pouvoir passivement se prémunir ?

Le labre est libre et très-mobile, ce qui est une exception parmi les Elatérides, exception qui n'est pas unique, car M. Perris a observé la même particularité chez les *Cryptohypnus*.

Ce qui est plus remarquable, c'est la présence des ocelles ; ces ocelles sont grands et leur existence ne peut donner lieu à aucune contestation ; et cependant les larves que j'ai sous les yeux sont adultes, à en juger par leur taille.

On voit que nous sommes encore loin d'arriver, par la connaissance des premiers états, à une classification systématique des insectes parfaits. Plus nous avançons dans l'étude des larves plus nous observons de ces faits considérés d'abord comme des exceptions, puis qui deviennent si nombreux qu'ils finissent par détruire les règles.

La famille des Elatérides est, certes, une famille bien homogène ; d'autre part il est incontestable que les larves ont aussi, sans préjudice de ce que l'on découvrira plus tard, un caractère commun bien tranché, à savoir, la soudure des mâchoires dans toute leur longueur avec le menton. Mais les Clythrides et les Peltides partagent ce caractère avec les Elatérides, et pourtant que devient plus tard ce lien de parenté ? En revanche qui pourrait dire, en examinant des larves d'Eucnémides et de Buprestides, que les insectes qui en sortiront auront une organisation si voisine de celle des Elatérides ?

Les généralités qu'on a pu écrire sur les larves de plusieurs familles, il y a quelques années, d'après un certain nombre de types, sont déjà à refaire aujourd'hui. Pour ne citer que les Élatérides, la connaissance des premiers états des *Cryptohypnus* et des *Campsosternus* est venue apporter de notables modifications à leur formule caractéristique, telle qu'elle avait été posée antérieurement par Erichson (1), puis plus tard par M. Perris (2).

LYCIDES.

On ne connaît encore, sur les larves des Lycides, que les détails donnés par Erichson et M. Perris sur celle du *Dictyopterus sanguineus* Fabr.

J'ai sous les yeux de nombreux spécimens de deux espèces exotiques sous leurs différents états; l'une, de Ceylan, est un *Lycus* proprement dit, l'autre, du Mexique, une espèce encore inédite du genre *Colapteron*.

LYCUS CINNABARINUS.

LARVE.

(Pl. III, Fig. 1.)

Tête très-petite eu égard à la grandeur du corps (1 millim. de longueur sur $^3/_4$ de largeur), enchassée au sommet du prothorax et complètement rétractile dans ce dernier (fig. 1^c), aplatie en dessus et en dessous, cornée, à bouche dirigée en avant.

Un ocelle de chaque côté, très-visible.

Antennes courtes, rétractiles (fig. 1^a), placées aux angles antérieurs de la tête sur deux avances coniques, et séparées de la boîte céphalique par un sillon en dessus, mais confondue avec elle en dessous, formées de deux articles dont le premier est annulaire, court, le second allongé, épaissi et tronqué obliquement au bout.

(1) Archiv. de Wiegm. 1841, I p. 85.

(2) Annal. d. la Soc. entom. d. Fr. 1854, p. 150.

Chaperon et lèvre supérieure nuls, la plaque sus-céphalique s'avançant en angle entre les antennes, à la place de ces pièces.

Mandibules très-courtes, grêles, contiguës à leur base et insérées sous le sommet de l'angle en question, presque droites, divergentes, acuminées au sommet, soudées en dessous à la pièce basilaire des mâchoires.

Mâchoires (fig. 1_b) contiguës au menton à la base mais non soudées avec lui, formées d'une pièce cardinale charnue, longitudinale, marquée vers le milieu d'un sillon oblique, d'une pièce basilaire courte, cylindrique, intimement soudée à la base avec la face inférieure des mandibules (qui, du reste, sont ici à l'état rudimentaire et semblent inutiles à l'animal), terminée par un palpe de trois articles de même longueur et diminuant graduellement d'épaisseur. Pas de lobe distinct.

Lèvre inférieure formée d'un menton charnu, faisant une assez forte saillie en avant, portant au sommet deux appendices très-distinctement triarticulés et dont le premier article me paraît être la pièce palpigère terminée comme d'habitude par un palpe de deux articles. Languette nulle.

Segments thoraciques protégés en dessus par des écussons cornés qui les débordent de chaque côté, le premier oblong, trapézoïdal, jaune avec une bande longitudinale et un point latéral noir, les deux suivants semblables, transversaux, arrondis aux angles, carénés au milieu, noirs avec les angles postérieurs jaunes, leur surface finement rugueuse et comme chagrinée.

Segments abdominaux recouverts d'écussons de même nature mais plus courts, moins larges que le corps vers le milieu, en sorte qu'ils sont débordés par les flancs de chaque côté, noirs, avec leurs angles postérieurs saillants, tuberculeux et jaunes; le premier écusson entièrement noir, le dernier en forme de croissant. Dessous jaunâtre avec cinq bandes longitudinales brun noir, une médiane et deux de chaque côté, celles-ci formées par autant de séries de tubercules.

Stigmates disposés de la manière suivante : deux sur le mésothorax, près du bord antérieur et en avant de l'insertion des hanches moyennes; deux aux points correspondants du métathorax; seize sur les huit premiers segments de l'abdomen,

situés en dessus et à la base des tubercules noirs latéraux les plus rapprochés des écusson.

Pattes assez longues, noirâtres, formées d'une hanche courte, dirigée en dehors, d'un trochanter soudé à la cuisse, d'une jambe grêle, ciliée, terminée par un ongle simple.

Corps long, de 20 à 21 millimètres chez la larve adulte, aplati en dessus, bombé en dessous, atténué aux extrémités.

Obs. Quelques particularités importantes à noter séparent cette larve de celle du *D. sanguineus*, pour la rapprocher manifestement des larves de Lampyrides. En premier lieu la rétractilité de la tête (fig. 1^{d}) qui est aussi prononcée que chez ces derniers, avec cette différence que le prothorax ne faisant pas de saillie en avant, les appendices de la tête restent toujours visibles en dessus. En second lieu, la présence d'une paire de stigmates sur le troisième segment du thorax. Ces stigmates métathoraciques sont petits et comme rudimentaires, peut-être même ne sont-ils pas perméables à l'air, (c'est aux anatomistes à trancher cette question), mais ils n'en sont pas moins visibles à l'extérieur et on doit en tenir compte au point de vue des caractères zoologiques.

Nymphe.

(Pl. III, Fig. 1^{e}).

Molle, blanche, oblongue, aplatie en dessus, la tête et le rostre appliqué contre le sternum, avec les antennes, en demi cercle, appliquées contre les parties latérales du corps, leur extrémité recourbée en avant en dessous des pattes moyennes. Bord du prothorax libre, cilié. Abdomen conique, chaque segment muni aux angles postérieurs d'une petite saillie membraneuse, et de chaque côté, sur le dos, d'une carène longitudinale; le dernier terminé par deux appendices filiformes. Pattes dans la position habituelle, l'extrémité des élytres et des ailes repliée et apparaissant, en dessous, entre les cuisses moyennes et postérieures.

Insecte parfait.

(Pl. III, Fig. 1^{e}).

Noir, opaque, les bords redressés du prothorax et les élytres rouges. Front impressionné au milieu, au dessus de l'insertion

des antennes ; rostre deux fois plus long que lui, un peu élargi au milieu. Prothorax concave, demi-circulaire, élevé et caréné longitudinalement en avant, sillonné transversalement vers le milieu, le sillon limité en arrière par un repli, les angles postérieurs prolongés un peu en dehors, les côtés foliacés et fortement redressés. Ecusson transversal. Elytres planes, très-élargies au milieu, arrondies sur les côtés et au bout, portant quatre côtes longitudinales élevées, les intervalles rugueux ; toute la surface couverte de petits poils rougeâtres, courts, couchés, dirigés en divers sens. — Long. 18 mill., larg. 10 mill. — Ceylan.

COLAPTERON CORRUGATUM.

LARVE.

(Pl. III, Fig. 2.)

Tête conformée comme celle de la précédente.

Antennes également de deux articles, mais le terminal arrondi et non tronqué au bout.

Mâchoires et mandibules également soudées à la base, mais laissant voir, entre le palpe et l'extrémité de celles-ci, un lobe corné très-bien détaché de la mandibule au sommet et paraissant en être un dédoublement.

Menton faisant très-peu de saillie et confondu dans la surface charnue du dessous de la tête. Les deux palpes insérés chacun sur leur pièce palpigère, lesquelles sont contiguës à la base.

Segments abdominaux beaucoup plus larges que les segments thoraciques, ce qui tient à la plus grande saillie des tubercules latéraux. Les écussons cornés, carénés au milieu, et portant quatre tubercules sur leur bord postérieur, les externes gros, sur les angles, les internes de chaque côté de la carène, petits ; jaunes, avec une bande médiane élargie en arrière et les angles antérieurs noirs ; la couleur jaune dominant sur les écussons thoraciques, réduite à deux points, seulement, sur les deux premiers de l'abdomen.

Stigmates comme chez la précédente.

On voit que cette larve présente quelque différence avec celle du *Lycus cinnabarinus*, notamment en ce qui concerne la con-

formation des mâchoires, qui sont ici munies d'un lobe, tandis que ce lobe n'existe pas, ou est plutôt soudé jusqu'au sommet avec la mandibule correspondante, chez ce dernier.

En lisant la description donnée par M. Perris de la larve du *Dictyopterus sanguineus*, je remarque que les mâchoires présentent une sorte de lobe en forme de tubercule corné. Sous ce rapport, l'espèce européenne ressemblerait donc davantage à celle-ci qu'à celle que j'ai décrite précédemment.

Nymphe.

(Pl. III, Fig. 2a.)

On peut voir par la figure que je donne de cette nymphe qu'elle diffère de la précédente sous plusieurs rapports.

Lorsqu'on examine la face ventrale, le prothorax, qui est beaucoup plus petit, n'apparaît pas sur les côtés ; en outre, au lieu de cils, il porte sur son bord libre six longs appendices filiformes, aplatis vers la base; on remarque des filaments semblables sur les bords latéraux de chaque segment de l'abdomen ; enfin l'extrémité du corps présente deux longs filets de même nature.

Insecte parfait.

(Pl. III, Fig, 2b).

Noir brunâtre, les côtés du prothorax et les élytres testacés, celles-ci noir bleuâtre dans leurs deux cinquièmes postérieurs. Antennes très-longues, foliacées, leur troisième article à peine aussi long que le suivant, le second extrêmement court. Rostre nul. Prothorax petit, concave, caréné au milieu, pubescent, arrondi en avant, ses angles postérieurs divergents, son bord postérieur prolongé un peu en arrière au milieu. Ecusson petit, oblong. Élytres triangulairement allongées, translucides, légèrement pubescentes, portant quatre côtes ou nervures longitudinales entières, très-saillantes et une cinquième courte, à l'extrémité, entre la quatrième et le bord externe ; ces nervures réunies par une multitude d'autres, transversales. Pattes noirâtres. — Long. 12-13 mill., larg. 8-9 mill.

Mexique.

Je lui ai laissé le nom sous lequel il est mentionné dans le catalogue de M. Deyrolle.

Cette espèce vit en société à l'état de larve. M. Sallé raconte qu'il l'a trouvée dans les circonstances suivantes : « En explorant un vallon situé au pied d'une montagne, à Toxpam près de Cordova, je fis la rencontre d'un gros arbre renversé et placé de telle manière que, soutenu par ses extrémités, le milieu était éloigné du sol et qu'il était possible de passer dessous. L'écorce était baillante et écartée du bois de plusieurs centimètres ; je la fis tomber, et, parmi les fongosités qui la tapissaient à l'intérieur, je vis avec surprise un espace de près d'un mètre de circonférence couvert d'une multitude de larves de toute taille, de nymphes et d'insectes parfaits. Les nymphes étaient suspendues par l'extrémité de l'abdomen à la façon des Coccinelles. Je ne découvris pas d'autres larves à l'entour, d'où je conclus que celles-ci se nourrissaient de blanc de champignon. »

LAMPYRIDES.

L'histoire des métamorphoses des insectes de cette famille est complète en ce qui concerne les espèces européennes. Quant aux exotiques, on a les descriptions de deux larves de Java, considérées d'abord comme des larves de Silphales ou de Malacodermes par Perty (1), comme des *Lycus* par M. Westwood (2) et définitivement comme des Lampyrides par Erichson (3). Maintenant que l'on connaît les larves des Lycides le doute n'est plus possible à cet égard. J'ai sous les yeux ces larves remarquables et j'ai pu constater aussi la présence des stigmates métathoraciques, qui sont, il est vrai, moins développés que les autres. On a vu plus haut que cette disposition des ouvertures respiratoires existe également chez des Lycides exotiques ; on la retrouve encore, mais à un degré moins prononcé, chez d'autres Lampyrides.

(1) Obs. nonnul. in Col. Ind. or. p. 43, pl. I, fig. 8, 9.
(2) Introd. to the mod. class. 254, , fig. 27, 1 et 28, 1.
(3) Arch. d. Wiegm. 1841, I, p. 90.

M. Goureau a fait connaître (1) la larve de l'*Aspisoma candelaria*, du Brésil. Voici la description de celle du *Photuris congrua* Chevr.

LARVE.

(Pl. III, Fig. 3).

Tête médiocre, complètement rétractile dans le prothorax, aplatie en dessus, convexe en dessous, à bouche dirigée en avant.

Un ocelle, assez grand, de chaque côté, placé sur la partie latérale de la tête, un peu en arrière de l'insertion des antennes.

Antennes assez longues, molles, blanches, faisant saillie sur les côtés de la tête; le premier article long, cylindrique, le second un peu plus court, atténué de la base au sommet, le dernier de même longueur mais plus grêle, garni de quelques poils; à son sommet on aperçoit comme une petite saillie indistinctement limitée à la base, qui est peut-être le rudiment d'un quatrième article.

Chaperon nul, lèvre supérieure rudimentaire, visible dans l'échancrure de la plaque sus-céphalique.

Mandibules saillantes, dirigées d'abord en avant, puis recourbée en dedans et se croisant au repos; celle de gauche portant en dedans une petite saillie dans sa partie moyenne.

Mâchoires très-allongées (fig. 3b), soudées au menton, portant chacune, au sommet, un palpe de trois articles dont le premier très-gros, cylindrique, le second fort court, en forme d'anneau, le troisième petit, conique, et en outre, en dedans du palpe, un petit lobe grêle, biarticulé.

Menton très-long, enchassé entre les deux mâchoires avec lesquelles il fait corps et dont il n'est séparé que par un sillon, échancré au sommet, chaque lobe portant une pièce palpigère courte surmontée d'un petit palpe biarticulé; languette nulle.

Thorax composé de segments semblables à ceux de l'abdomen quant à la consistance et la couleur, mais un peu plus allongés; tous, protégés en dessus par des écussons cornés. Les segments

(1) Ann. d. la Soc. entom. de Fr. III, 2e Sér. 1845, 345, pl. VII, n° 2, fig. 1, 6.

abdominaux présentant chacun, en dessous, sept tubercules dont le médian très-large, le neuvième segment petit, formant lui-même le pied anal.

Stigmates disposés de la façon suivante : deux, petits, sur les tubercules de la face inférieure du mésothorax, deux plus petits encore sur les parties correspondantes du métathorax, sept, grands, sur les sept premiers segments de l'abdomen, placés entre les deux tubercules externes de la face inférieure. Tous ces stigmates sont largement aréolés de noir sur un fond jaune, ce qui les rend très-distincts à l'œil nu. Le huitième segment en est complètement dépourvu.

Le corps est long de 30 millimètres sur une largeur de 6 mill. ; entièrement glabre, aplati en dessus, bombé et muni de tubercules très-lisses en dessous. Les écussons sont finement chagrinés et, vus à la loupe, ils offrent l'aspect d'une mosaïque ou plutôt d'une peau écailleuse de serpent à fond brun clair, avec des dessins réguliers formés par des granulations d'un brun noir. Le dessous est jaune.

Elle vit, comme les autres larves des Lampyrides, à la surface du sol ou elle fait la chasse aux mollusques.

(*Obs.*) S'il s'agissait ici d'une larve apode on pourrait croire, d'après la position des stigmates, que j'ai pris le premier segment de l'abdomen pour le métathorax et le tubercule anal pour le neuvième. Si j'avais commis cette méprise, il en résulterait que les stigmates seraient, en réalité, placés normalement. Mais la larve est d'assez grande taille et les pattes sont trop bien développées pour qu'une erreur aussi grossière soit possible. Quant au tubercule anal il est protégé en dessus par un véritable écusson corné, qui ne diffère des autres que par ses dimensions moindres. En examinant attentivement, on distingue un repli cutané circulaire qui limite très-nettement les bords de l'anus.

Entre autres différences que cette larve présente avec celle des *Lampyris*, on remarque la présence d'une dent aux mandibules. Cette dent n'existe ici qu'à la mandibule de gauche ; c'est peut-être un cas accidentel et particulier au seul spécimen de l'espèce que j'ai à ma disposition. Chez d'autres espèces du même genre, les dents existent aussi, et des deux côtés.

PHOTURIS TRILINEATA.

Say, *Bost. Journ. of nat. Hist.* 1 p. 157.

LARVE.

Plus petite que la précédente, d'une teinte générale plus foncée, les disques noirs au milieu desquels s'ouvrent les stigmates, encore plus grands.

Ecussons dorsaux transversalement arqués, leurs angles postérieurs accusés (fig. 4), avec les deux échancrures du bord correspondant à peu près nulles.

Les mandibules sont, chez cette larve, très-distinctement dentées de chaque côté (fig. 4a); cette dent se présente sous la forme d'un petit tubercule arrondi.

M. Sallé l'a trouvée sous des buches, en septembre, à Toxpam.

PHOTURIS PENSYLVANICA.

De Geer, *Mém.* IV, p. 53, pl. 17, fig. 8.

(*L. versicolor.* Fab. *Syst. Eleuth.*)

LARVE.

Plus petite encore et proportionnément plus large, (15 mill. de longueur sur 5 de largeur); les écussons bombés seulement dans leur partie moyenne, avec les côtés aplatis, les premiers de l'abdomen au moins trois fois plus larges que longs, de couleur presque uniformément brune.

Pas d'aréoles noires aux stigmates.

Mandibules munies en dedans d'une dent aiguë située plus près de la base (fig. 5) que chez la *P. trilineata.*

Elle vit dans le gazon ou sous les buches. L'insecte parfait vole le soir; le jour il se tient caché sous les feuilles. On le trouve, à la Nouvelle-Orléans, depuis avril jusqu'en août.

PTINIORES.

CATORAMA PALMARUM.

(Guér. in Sallé, Mss.).

Les mœurs des *Catorama*, petits insectes très-voisins des *Dorcatoma*, ont été signalés pour la première fois par M. Guérin-Méneville (1). Cet auteur a fondé ce genre sur une espèce (*C. tabaci*), dont la larve a été trouvée, à Paris, dans des cigares provenant de la Havane.

L'année suivante ce savant a encore mentionné (2), mais sans les décrire, deux autres espèces découvertes à Haïty par M. Sallé. L'une (*Sallei*) vit dans les gousses d'un arbre voisin du Caroubier; l'autre, qui est celle-ci, se nourrit aux dépens d'une graine que les habitants du pays nomment *Guano manso*, et qui provient du *Thrinax parviflora* Sw. de la famille des Palmiers.

La larve du *C. palmarum* ressemble, pour la forme générale, aux larves d'*Anobium*, que tout le monde connaît. Examinée dans ses détails elle ne m'a offert aucune particularité digne d'être mentionnée. Je me borne donc à la figurer, sans la décrire. (Pl. III, fig. 7).

Voici les caractères, encore inédits, de l'insecte parfait :

Ovoïde, un peu aplati en dessous, noir, revêtu d'une pubescence très-fine et très-courte, assez dense, couchée, soyeuse, cendrée, qui lui communique une teinte générale olivâtre. Tête fortement repliée en dessous, le front caréné au milieu en avant. Pronotum transversal, les angles antérieurs repliés en dessous, les postérieurs arrondis, faiblement sillonné au milieu. Elytres oblongues, finement et linéairement ponctuées. Dessous et pattes brunâtres. — Long. 4 mill., larg. 2 3/4 mill.

Haïty.

(1) Rev. et Mag. d. Zool. 1850, p. 431.

(2) Ann. d. la Soc. entom. 1851; Bullet. CXV.

CISSIDES.

Les larves des insectes de cette petite famille, dont la vie entière se passe dans les bolets, sont bien connues, grâce à la facilité avec laquelle on peut se les procurer. On possède en effet la description de plusieurs d'entre elles, et l'on sait combien elles diffèrent peu de celles des Cryptophagides, ce qui a engagé plusieurs entomologistes à éloigner les *Cis* des *Anobium*, à côté desquels on les classe habituellement, pour les rapprocher des *Cryptophagus*.

Je tiens, de M. Nietner, des larves et des insectes parfaits d'une curieuse espèce de Ceylan, qui existe déjà depuis plusieurs années dans les collections européennes, mais n'a pas encore été décrite, à ma connaissance. Elle doit former le type d'un genre nouveau.

Quant à la larve, elle est entièrement conforme à celles des *Cis* en ce qui concerne la structure des différentes pièces de la tête et la forme du corps, ainsi que l'on pourra s'en assurer par le dessin que j'en donne (pl. III, fig. 8). Il me suffira de mentionner, comme caractère particulier, la structure des crochets terminaux qui se bifurquent chacun dès la base, et forment ainsi quatre épines redressées (fig. 8^c et 8^d).

Les auteurs n'étant pas d'accord sur le nombre des ocelles chez les larves de *Cis*, j'ai spécialement dirigé mon attention sur ce point, en étudiant l'espèce actuelle. J'ai compté très-distinctement trois de ces organes de chaque côté, en arrière de l'insertion des antennes; c'est le nombre indiqué par MM. Perris et Coquerel pour les espèces qu'ils ont fait connaître.

Voici les caractères de l'insecte parfait.

G. PTEROGENIUS.

Tête grande, concave en dessus, présentant, chez les mâles, une large expansion de chaque côté, ce qui la rend tout-à-fait transversale et plus large que le prothorax; en demi cercle chez la femelle. — Menton en trapèze. — Languette en ovale transversal. — Palpes labiaux terminés par un article oblongo-

ovale. — Mâchoires à lobes courts fortement ciliés en dedans. — Palpes maxillaires longs, à premier et troisième articles courts, second allongé, dernier grand, triangulaire. — Mandibules bifides au sommet. — Labre très-apparent, vertical. — Yeux placés dans une échancrure du bord postérieur de l'expansion latérale. — Antennes presque aussi longues que le corps chez le mâle, un peu plus courtes chez la femelle, insérées en dessous, devant les yeux, de onze articles, le premier cylindrique, long, le second trois fois plus court, le troisième égal à la moitié du premier et plus long que les suivants, la massue terminale prenant insensiblement naissance vers le milieu et composée d'articles seulement un peu plus larges que ceux de la base. — Prothorax transversal. — Ecusson triangulaire, plus large que long. — Elytres courtes, bombées. — Prosternum caréné. — Abdomen à premier et deuxième segments beaucoup plus allongés que les trois derniers. — Pattes médiocres, les hanches des antérieures globuleuses, celles des postérieures transversales; tarses de cinq articles à toutes les pattes au moins chez le mâle, les quatre premiers à peine aussi longs ensemble que le cinquième, assez fortement villeux, terminés par deux crochets robustes.

PTEROGENIUS NIETNERI.

(Pl. III, Fig. 8c.)

(♂) D'un noir brunâtre, médiocrement luisant, la tête et les élytres, surtout l'extrémité de celles-ci, couvertes mais peu densément de poils brunâtres, le prothorax avec quelques poils épars. Antennes allongées, pubescentes, de la couleur du corps. Front largement dilaté sur les côtés et débordant le prothorax, anguleux latéralement, concave et densément ponctué en dessus. Prothorax transversal, un peu plus long au milieu que sur les côtés, arqué dans le sens transversal, rebordé latéralement, densément et fortement ponctué. Elytres à peu près trois fois aussi longues que le prothorax et un peu plus larges, arrondies en arrière, bombées, ponctuées comme le prothorax, sans stries. — Long. 5 1/4 mill., larg. 1 1/3 mill.

(♀) La femelle est très-distincte du mâle par sa tête beaucoup

moins dilatée sur les côtés et de forme demi-circulaire ; ses antennes sont un peu plus courtes.

TÉNÉBRIONIDES.

(BOLITOPHAGIDES.)

BOLITOTHERUS CORNUTUS.

FABR. *Syst. Eleuth.* I, 112.

LARVE.

(Pl. III, fig. 9.)

Tête cornée, arrondie, convexe en dessus, à bouche dirigée en bas, présentant, au-dessus de l'articulation du chaperon, deux petits tubercules durs, lisses au sommet (fig. 9ª).

Ocelles nuls. (1).

Antennes plus courtes que les mandibules, placées contre la face externe de celles-ci, de quatre articles, le premier gros, cylindrique, aussi large que long, le second un peu plus court et beaucoup plus grêle, le troisième plus grêle encore et une demi fois plus long que le précédent, portant à son sommet, mais inséré un peu en dehors de son axe, le quatrième qui est extrêmement petit.

Chaperon en trapèze, grand, bien séparé de la plaque suscéphalique par un double sillon transversal.

Lèvre supérieure arrondie, poilue.

Mandibules saillantes, bifides au sommet avec la division inférieure plus longue que l'autre, présentant, en dessus, une côte saillante qui se termine en arrière par un gros tubercule, leur face inférieure convexe, l'externe aplatie vers la base et contiguë aux antennes, l'interne munie à la base d'une forte dent molaire.

Mâchoires (fig. 9ᵇ) formant avec la lèvre inférieure une plaque

(1) A moins que la surface lisse des tubercules frontaux ne soient ces organes, ce qui est peu probable.

quadrangulaire saillante, leur pièce cardinale transversale, charnue, la pièce basilaire longitudinale, terminée par un lobe charnu, arrondi, cilié, et un palpe de trois articles dont les deuxième et troisième à peu près de même longueur, le premier plus gros et plus court.

Lèvre inférieure à menton allongé, pyriforme, à pièce palpigère charnue, transversale, échancrée au milieu pour recevoir une très-petite languette et portant de chaque côté un palpe biarticulé.

Segments thoraciques semblables aux segments abdominaux; le prothorax un peu plus long que les autres, dépourvu de même de plaque cornée.

Segments abdominaux au nombre de neuf, semblables entre eux, étranglés aux articulations, aplatis et sillonnés de chaque côté sur la face ventrale; le neuvième court, bombé, muni de deux très-petits appendices (fig. 9c), portant une ouverture anale à peine saillante et à lèvre circulaire et concentriquement sillonnée.

Stigmates normaux.

Pattes charnues (fig. 9b), épaisses, médiocrement longues; la hanche oblique en dedans et en avant, les trochanters presque aussi longs que la cuisse, coupés obliquement en dehors, les trois articles suivants de même longueur mais diminuant rapidement de grosseur.

Corps long de 20 millimètres, large de trois, un peu arqué; paraissant cylindrique, vu en dessus, aplati et bisillonné en dessous; blanchâtre, la tête jaune, les mandibules noires; mou, charnu, glabre, dépourvu de pseudopode à l'extrémité.

(*Obs.*) Lorsqu'on examine cette larve, on est frappé des rapports qu'elle présente avec celles des Lamellicornes : même forme de tête, même grandeur du chaperon et du labre, disposition semblable des mandibules, des antennes, des mâchoires, etc.; mais lorsqu'on entre dans les détails on remarque des différences notables, telles que la simplicité du lobe des mâchoires, le nombre moindre des articles des antennes, les pattes plus courtes, le dernier segment de l'abdomen autrement fait, etc. Il n'en est pas moins vrai qu'entre les larves des différentes tribus de la famille en question, il existe des dissemblances d'une valeur au moins aussi grande, et que si celles des *Bolitophagus* y étaient comprises elles n'y seraient pas trop déplacées.

Quant aux insectes à l'état parfait, on ne peut nier les rapports de forme qu'ils ont avec certains Lamellicornes, les Trogides par exemple, parmi lesquels l'un d'entre eux avait été placé par Fabricius.

Insecte parfait.

En prenant pour type du genre *Bolitophagus* l'espèce européenne la plus anciennement connue, le *B. reticulatus* L., on remarque chez le *cornutus* des différences assez importantes pour justifier sa séparation générique d'avec ce dernier. Cette mesure a déjà été proposée par M. Lacordaire (1) en considération d'un caractère essentiel qu'il a reconnu le premier, à savoir la composition des antennes, qui n'ont que dix articles, tandis qu'elles en ont onze chez les vrais *Bolitophagus*.

Je propose donc pour le *B. cornutus* le nom générique de *Bolitotherus* avec les caractères suivants :

Menton subtrapézoidal, bisinué en avant. — Languette dilatée et ciliée en avant ; les palpes labiaux insérés dans une échancrure des côtés, de trois articles, le second globuleux, le troisième allongé. — Dernier article des palpes maxillaires subcylindrique, tronqué au bout. — Labre court, transversal. — Tête dilatée au delà des yeux, son bord antérieur festonné, denté ou cornu chez les mâles. — Yeux transversaux, divisés par les joues seulement dans leur moitié antérieure. — Antennes de la longueur du prothorax (fig. 9^{d}), de dix articles, le premier allongé, assez gros, le second globuleux, le troisième à peu près aussi long que les deux suivants réunis, 4-6 égaux, 7-9 s'élargissant graduellement pour former la massue, le dernier subarrondi, plus ou moins échancré sur les côtés. — Prothorax transversal, fortement rétréci à la base, foliacé et crenelé sur les côtés, très-échancré en avant, sa surface inégale, rugueuse, muni, chez les mâles, de deux longues cornes courbes. — Ecusson en triangle curviligne. — Elytres courtes, parallèles, très-déclives et presque perpendiculaires sur les côtés et en arrière, leur surface couverte de rugosités et de tubercules. — Pattes assez longues ; cuisses comprimées ; jambes de la longueur des cuisses ; tarses hétéromères, villeux en dessous, les premiers articles très-courts, le dernier plus grand que les précédents réunis, arqué, cylin-

(1) Genera, V, p. 295; note.

drique; crochets robustes, simples. — Saillie posternale repliée en dedans et faisant face au mésosternum qui est vertical et en forme de v renversé. — Hanches transversales.

L'espèce est bien connue.

Au genre *Bolitotherus* se rattache encore une espèce de Ceylan dont je possède aussi la larve. Cette espèce ne peut entrer dans le genre *Boletoxenus*, créé récemment par M. de Motschoulski (1) sur un Bolitophagide de Birma, qui se distingue par ses antennes à dernier article obliquement tronqué. En revanche, la formule que je viens de rédiger pour l'espèce américaine lui convient de tout point; je la nommerai donc :

BOLITOTHERUS QUADRIDENTATUS.

La larve est conformée comme celle du *B. cornutus*, sauf les particularités suivantes :

Le corps est plus court, ce qui résulte naturellement de la taille moins grande de l'insecte parfait.

Les tubercules du front sont plus espacés, chacun d'eux étant plus éloigné de son correspondant que du bord latéral de la tête.

Enfin, le dernier segment de l'abdomen est complètement dépourvu d'appendices.

Insecte parfait.

(♂) Entièrement noir, opaque, couvert de granulations et d'aspérités. Front présentant en avant quatre dents fortes, les deux externes sur le bord antérieur lui-même, au devant des yeux, les deux internes un peu en arrière de ce bord. Prothorax transversal, fortement échancré en demi cercle en avant, ses côtés arqués et à bord découpé en dents de scie, ces dents très-fortes et au nombre de six à sept; muni de deux longues cornes dirigées horizontalement, se recourbant l'une vers l'autre; son bord postérieur bisinué. Ecusson petit. Elytres plus larges que le prothorax, à peu près aussi larges que longues, présentant neuf côtes formées par de nombreux tubercules d'inégale hauteur, les intervalles granuleux.

(1) Etudes entomol. VIII.

(♀) La femelle se distingue par le bord antérieur du front simple, complètement dépourvu de dentelures et son prothorax sans cornes, sillonné longitudinalement au milieu.

Long. 5 mill., larg. 3 mill. — Ceylan.

(DIAPÉRIDES.)

CEROPRIA SUBOCELLATA.

Casteln. et Brullé, *nn. d. Sc. nat.* XXIII, p. 397.

Et Platydema elliptica Fabr.

M. Lacordaire, en parlant des larves des *Diapérides vrais* (1), dont plusieurs sont connues, dit qu'elles se divisent en deux catégories d'après leur genre de vie; les unes vivant dans l'intérieur des bolets où elles creusent de nombreuses galeries, les autres cheminant sous les écorces et se nourrissant de la substance fongueuse qui s'y rencontre. Les premières, représentées par celle du *Diaperis boleti*, paraissent caractérisées par l'absence des ocelles; les secondes, parmi lesquelles on compte celles des *Platydema*, seraient au contraire pourvues d'organes visuels.

Les premiers états de la *Platydema europæa* Lap. ont été soigneusement décrits par M. Perris (2). La formule descriptive et les figures très-détaillées qu'il en donne m'ont permis de leur comparer la larve et la nymphe d'une *Diapéride* de Ceylan, la *Ceropria subocellata*, que je tiens de M. Nietner.

La larve de l'espèce indienne est plus grande (15 mill.) que celle de la *Platydema*. La tête et ses différentes pièces sont identiquement semblables; les ocelles sont également au nombre de quatre de chaque côté et disposés de la même façon; la forme générale, la couleur, la consistance ne diffèrent pas; les stigmates sont au nombre de neuf et placés de la même manière; enfin, le pseudopode offre aussi cette particularité qu'il est bifurqué, ou plutôt dédoublé.

La seule chose à mentionner est la simplicité du dernier

(1) Genera, V, p. 300.

(2) Ann. d. l. Soc. entom. d. Fr. Sér. 3, V, p. 343.

segment de l'abdomen. En effet, chez les larves des *Platydema* et *Scaphidema* connues jusqu'ici, l'écusson de ce segment est muni de deux petites épines. Celles de *Cerapria* ne présentent au même endroit aucune espèce d'appendice ou d'aspérités.

La larve de la *Platydema elliptica* Fab., de la N^lle^ Orléans, m'a été communiquée par M. Sallé, qui l'a trouvée en mars dans les mêmes conditions que ses congénères d'Europe. Je n'ai rien à en dire, sinon que son segment terminal est muni, au bord postérieur, de cinq épines courtes, les trois internes rapprochées, les externes un peu écartées.

CURCULIONIDES.

ANCHONUS CRISTATUS.

On connait déjà la larve d'un *Anchonus*, l'*A. cribricollis*, des Antilles, décrite succinctement et figurée par M. Coquerel dans le T. VII, 2^e^ série, des *Annales de la Société entom. de France*. Voici la description plus détaillée de celle d'une espèce du Venezuela.

LARVE.

(Pl. IV, fig. 2.)

Tête médiocre, ovale, cornée, à bouche dirigée en bas.

Plaque sus-céphalique lisse, présentant plusieurs impressions longitudinales faibles et portant quelques longues soies jaunes redressées.

Un petit ocelle de chaque côté, arrondi, bien visible.

Antennes représentées par un très-petit mamelon charnu logé en dehors et en arrière du point d'insertion des mandibules, dans une légère excavation.

Chaperon nettement séparé du front, enchassé dans une échancrure et entre deux saillies de ce dernier, échancré en avant et un peu réniforme.

Labre dur, corné, allongé, divisé longitudinalement en trois parties par deux forts sillons qui se changent en échancrures à la partie antérieure. Les trois dents qui en résultent en avant, arrondies.

Mandibules médiocrement longues, échancrées au bout, bissillonnées longitudinalement en dedans, sans dent molaire à la base, leurs faces externe et supérieure présentant quelques stries obliques, vers le milieu, et quelques inégalités près de l'insertion.

Mâchoires (fig. 2^b) très-écartées l'une de l'autre, la pièce cardinale peu distincte, la pièce basilaire dirigée obliquement en avant, se continuant en un lobe charnu et cilié, portant en dehors, dans une échancrure ménagée à cet effet, un petit palpe de deux articles.

Lèvre inférieure formée d'un menton très-grand (fig. 2^b), plus large que long, marqué d'une impression transversale terminée à chaque bout par un sillon court, longitudinal; arrondi sur les côtés, échancré en v à branches très-ouvertes en avant, recevant dans cette échancrure une pièce palpigère charnue, trilobée, les lobes externes portant des palpes labiaux de deux articles, courts, le lobe médian ou la languette chargé de soies dorées.

Segments thoraciques courts, séparés par de profonds sillons, surtout en dessous, mamelonés sur les côtés, marqués de sillons obliques supérieurement et inférieurement.

Segments abdominaux moins nettement séparés que les précédents, les plis de jonctions confondus avec d'autres également transversaux et qui leur sont parallèles sur la face ventrale, les côtés présentant un sillon longitudinal courant d'un bout à l'autre du corps et des mamelons de forme plus ou moins triangulaire; le dernier segment en forme de sac, lisse; l'anus dirigé directement en arrière, paraissant sous la forme d'un point enfoncé entouré de quatre petits tubercules.

Stigmates en nombre normal, la première paire placée dans un des replis de la partie latérale et antérieure du thorax sans qu'il soit possible de déterminer si ce repli sépare les deux premiers segments ou fait partie de l'un d'eux; les autres sur les mamelons supérieurs des côtés des huit premiers segments de l'abdomen.

Le corps de cette larve est long de 12 millimètres sur 4 de largeur. La tête seule est cornée et d'un jaune rougeâtre, le reste est mou et blanchâtre. Il est garni de quelques longs poils d'un jaune doré, hérissés; sa forme est toute particulière: étroit en avant il s'épaissit peu à peu jusqu'au huitième segment

abdominal, où il a sa plus grande largeur, pour se terminer brusquement par la surface lisse et convexe du dernier segment.

M. Sallé a trouvé cette espèce, à Caracas, au mois de mars, en terre froide, dans des copeaux provenant de bois coupés.

Nymphe.

Elle n'offre aucune particularité digne d'être mentionnée, elle présente les formes de l'insecte parfait sauf la position repliée et la brièveté des ailes; l'abdomen porte, de chaque côté des segments, de petits appendices membraneux.

Insecte parfait.

(Pl. IV, Fig. 2e.)

Tout entier d'un noir opaque, revêtu de quelques poils squamiformes courts, redressés, jaunâtres. Rostre de la longueur de la tête et du prothorax, arqué, marqué à la base de très-gros points serrés, à l'extrémité de points plus rares et plus petits. Antennes ferrugineuses, la massue chargée de poils jaunâtres. Prothorax globuleux, portant une douzaine de gros tubercules entre lesquels il s'en trouve d'autres plus petits ainsi que des inégalités et quelques gros points, le milieu présentant un espace longitudinal lisse. Elytres tuberculeuses comme le prothorax, les tubercules petits et disposés en séries sur les parties latérales, plus gros, plus espacés et plus irrégulièrement placés sur le dos, la base offrant quatre crêtes élevées, courtes, à bords dentés. Pattes rugueuses, ciliées, noires avec les tarses ferrugineux. — Long. 8 mill., larg. 3 mill. — Caracas.

BARIDIUS VESTITUS.

Schönh. *Gener. et Spec. Curcul.*

On sait que les larves de *Baridius* vivent dans l'intérieur des végétaux herbacés dont elles rongent la moëlle, et que plusieurs d'entre elles sont très-nuisibles aux champs et aux potagers, en attaquant certaines plantes dont nous faisons usages. C'est ainsi

que les *B. chlorizans* Mull., *cuprirostris* F. et *picinus* Germ., vivent aux dépens des choux. Le *B. chloris* dévaste les plantations de colza et le *B. trinotatus* celles de pommes de terre.

L'espèce dont il est ici question est fort redoutée au Mexique, à cause des dégats qu'elle commet dans les plantations de tabacs. Voici ses caractères, j'exposerai ensuite sa manière de vivre, d'après les observations faites par M. Sallé.

LARVE.

(Pl. IV, Fig. 3.)

Tête arrondie, convexe, cornée, à bouche dirigée en bas.

Plaque sus-céphalique lisse, portant une ligne longitudinale enfoncée en arrière et deux petites impressions antérieurement, avec quelques poils redressés, semés ça et là. Son bord antérieur coupé droit, ses angles correspondants couverts d'inégalités.

Ocelles invisibles.

Antennes nulles.

Chaperon séparé du front par un sillon, assez large et court, tronqué carrément en avant.

Labre charnu, court, transversal, bisinué et revêtu de quelques poils dorés en avant.

Mandibules courtes, coniques, arquées, concaves en dedans, bidentées au bout, sillonnées dans toute leur longueur en dessus, offrant une côte sur leur face externe et des inégalités à la base, sans dent molaire.

Mâchoires très-espacées à la base, dirigées obliquement en avant et en dedans, leur pièce cardinale vaguement triangulaire, leur pièce basilaire oblongue, terminée par un lobe soudé, cilié en dedans (fig. 3c) et un petit palpe de deux articles.

Lèvre inférieure composée d'un très-grand menton cordiforme, biimpressionné (fig. 3b), recevant, dans une large échancrure antérieure, la pièce palpigère portant deux palpes labiaux biarticulés; la languette nulle.

Segments thoraciques et abdominaux de mêmes consistance et couleur; le prothorax seul présentant en dessus deux mamelons à téguments plus résistants. Les trois premiers portant en dessous, chacun, deux tubercules représentant les pattes. Les segments

abdominaux faiblement sillonnés en dessus, de façon à présenter trois légers bourrelets, dont le postérieur porte cinq à six petits mamelons disposés sur une ligne transversale. Ces mamelons facilitent probablement la progression de la larve dans les galeries où elle vit. Le dernier segment porte, à son extrémité, un prolongement terminé par quatre tubercules rapprochés, au centre desquels s'ouvre l'anus.

Stigmates en nombre normal; la première paire située latéralement au dessus de la fente qui sépare les deux mamelons ou fausses pattes antérieures.

Le corps est long de 12 à 15 millimètres sur 3 à 4 de largeur, de consistance molle, blanchâtre, de forme arquée, cylindrique, atténuée aux extrémités, presque glabre. La tête est petite, relativement au corps, et de couleur jaune.

Cette larve vit, ainsi que je l'ai dit plus haut, dans les tiges des tabacs, bien qu'on la rencontre également dans d'autres solanées, telles que les *Daturas*. Les cultivateurs, au Mexique, la désignent sous le nom de *Saratan*. Ses ravages commencent aussitôt après la plantation des jeunes pieds de tabac, c'est-à-dire au mois de novembre, époque où la femelle pond ses œufs. Celle-ci, connue sous le nom de *Mosquela*, coupe au moyen de ses mandibules la côte principale de la feuille et y dépose un œuf. Cette opération, comme on le comprend, fait périr toute la partie de la feuille qui est au dessus de la blessure et occasionne déjà un tort considérable au cultivateur.

La jeune larve, éclose, chemine dans l'intérieur du pétiole et pénètre par là au cœur de la tige où elle s'établit dans la moëlle. La plante, encore faible, souffre beaucoup à cette époque et périrait même, si le cultivateur, averti par l'étiolement des feuilles, n'intervenait en pratiquant, au moyen d'une petite lame, une incision longitudinale à l'endroit où se trouve l'animal; il se trompe rarement. La larve extraite, la blessure se cicatrise rapidement, et la plante ne tarde pas à recouvrer sa vigueur.

Les pontes faites en mars, au moment de la récolte, sont moins fatales à la plante qui a acquis tout son développement. Rien ne trahit à l'extérieur la présence de l'ennemi, et presque tous les pieds de tabacs renferment alors un *Saratan* dans leur tige.

Les tiges, ajoute M. Sallé auquel je dois ces détails, restant dans les champs après la récolte, jusqu'à la fin d'avril, époque

où on les arrache, servent de refuge aux larves et aux nymphes en sorte que l'insecte parfait est très-abondant en été.

Quand le moment de la transformation est arrivé, la larve élargit sa galerie, et au moyen des débris qui proviennent de cette opération elle construit une coque (fig. 3[d] et 3[e]) à parois assez résistantes, très-lisse et enduite d'un vernis mucilagineux en dedans.

La nymphe n'a rien qui mérite d'être mentionné. Quant à l'insecte parfait il est bien connu.

RHYNCHOPHORUS ZIMMERMANNI.

Schönh. *Gener. et Spec. Curcul.*

LARVE.

(Pl. IV, fig. 1).

Tête oblongue, cornée, à bouche dirigée en bas.

Plaque suscéphalique présentant en arrière un court sillon médian à bords soulevés, se prolongeant en avant en une fine ligne qui se bifurque et dont les branches se dirigent vers les angles antérieurs du front. L'espace compris entre ces branches et le bord antérieur est marqué de quatre sillons profonds, larges, sinueux ; en arrière la surface est couverte de facettes un peu déprimées et dont les bords sont lisses et plus luisants, de sorte que leur ensemble forme comme un réseau brillant se détachant sur un fond mat. Le devant porte quelques longs poils redressés.

Un ocelle de chaque côté.

Antennes nulles ou pouvant être considérées comme telles ; la grande taille de la larve permet seulement d'apercevoir au devant de l'ocelle, à la place occupée habituellement par ces organes, un très-petit tubercule charnu, logé dans une dépression de la substance cornée. Ce tubercule est probablement un vestige de l'antenne.

Chaperon bien limité, en trapèze à angles arrondis, sillonné transversalement au milieu, enchassé entre deux avances du bord antérieur de la tête.

Labre grand, transversal, trilobé, muni en avant de poils dorés.

Mandibules robustes, coniques, un peu arquées au sommet; leur face interne concave, sans dent basilaire; leur face externe arrondie, présentant deux mamelons à la base et trois gros points enfoncés vers leur partie moyenne.

Mâchoires (fig. 2c) très-écartées à la base, à pièce cardinale transversale, conique, à pièce basilaire oblongue, un peu renflée au sommet, portant un lobe charnu, soudé, cilié, et en dehors un petit palpe de deux articles.

Lèvre inférieure formée d'un menton grand, quadrangulaire, profondément et largement bissillonné longitudinalement, surmonté d'une pièce palpigère trilobée, les deux lobes externes portant chacun un palpe court de deux articles, le lobe moyen représentant la languette, cilié, renforcé en dedans de la cavité buccale par deux mamelons longitudinaux, charnus.

Segments thoraciques semblables aux segments abdominaux pour la consistance, la couleur, etc., tous parfaitement séparés entre eux par un sillon circulaire profond; le premier segment couvert en dessus par deux plaques subcornées et présentant en arrière un bourrelet; les segments suivants offrant trois, puis quatre bourrelets d'autant plus courts et séparés par des sillons d'autant plus profonds qu'ils se rapprochent de l'extrémité. Les côtés marqués d'une multitude de rides longitudinales. Le dessous offrant une bande où les rides latérales s'effacent tout-à-coup et où reparaissent les bourrelets. Le neuvième segment petit, comme écrasé, protégé en dessus et en dessous par une plaque cornée concave, sans rides ni bourrelets, à bord postérieur arqué et sinueux.

Stigmates au nombre de neuf paires, la première sur les côtés du prothorax, les autres sur les côtés des huit premiers segments abdominaux, à péritrèmes très-petits malgré la grande taille de la larve et très-difficiles à découvrir, perdus qu'ils sont dans les nombreux replis de la peau et ne se distinguant de celle-ci par aucune différence de coloration.

Pattes tout-à-fait nulles, représentées par de petites plaques arrondies, cornées, luisantes.

Cette larve est fusiforme et contournée en S lorsqu'on la voit de profil, par la raison que sa tête se recourbe en dessous tandis que son extrémité postérieure est redressée. Elle est d'un beau jaune roux soyeux, avec la tête rouge. Sa longueur est, en moyenne, de 40 millimètres sur 18 de largeur.

Elle vit dans la moelle du *Chamerops Palmetto* Wild. qu'elle finit par faire mourir ; elle paraît au reste n'attaquer que les arbres déjà malades. A la Louisianne, les défricheurs ont l'habitude, pour faire périr les lataniers, d'enfoncer un coin de bois jusqu'au cœur de l'arbre. L'insecte profite de la blessure pour y déposer ses œufs, et quelquefois on trouve une trentaine de larves dans l'intérieur d'un seul tronc. Quand la larve est sur le point de se métamorphoser en nymphe, elle se construit une sorte de coque (fig. 1[f]) épaisse et très-solide, au moyen de la fibre qui garnit la base des pétioles. Il n'est pas rare, dit M. Sallé, de trouver dans ces coques des insectes parfaits desséchés, qui n'ayant pu sans doute en sortir, y sont morts emprisonnés.

Lorsqu'on extrait la larve des galeries où elle vit et qu'on la place sur le sol, elle rampe en s'aidant de ses mandibules.

Nymphe.

(Fig. 1[d] et 1[e]).

Elle ne présente rien de particulier, et les deux figures que j'en donne montreront suffisamment la position des antennes, du rostre, des ailes, des pattes, etc.

Insecte parfait.

Cet insecte, d'un beau noir brillant en dessous, recouvert en dessus d'une pulvérulence très-tenue et d'un noir mat à reflet azuré, est commun aux environs de la N[lle] Orléans. On le prend quelquefois au vol, le soir, en mars et pendant l'été ; mais c'est dans l'intérieur des lataniers qu'il faut surtout le chercher.

SCOLYTIDES.

TOMICUS FERRUGINEUS.

Fabr. *System. Eleuth.*

La larve de cette espèce ne diffère en rien des autres du même genre, il est donc tout-à-fait inutile de la décrire, alors que MM. Ratzeburg (1) Nordlinger (2) et Perris (3) ont fait connaître tout ce qu'il était utile de savoir de l'histoire des espèces européennes. Je ne mentionne celle-ci que pour indiquer qu'elle vit, en Amérique, dans les feuilles à demi desséchées de l'*Agave americana*.

LONGICORNES.

TRICHODERES PINI.

Chevr. *Mag. d. Zool.* 1843. p. 36, pl. 113.

LARVE.

(Pl. V, fig. 1.)

Tête médiocre, à demi enchassée dans le prothorax, assez épaisse, à bouche dirigée en avant. Le dessus lisse avec quelques petites stries longitudinales vers le milieu, le bord antérieur épaissi, échancré au niveau du chaperon, transversalement caréné un peu en arrière de l'échancrure, avec la carène interrompue sur la ligne médiane; toujours en avant, entre cette carène et un tubercule latéral qui porte l'antenne, une excavation a bord irrégulièrement sculpté.

Antennes très-visibles, portées sur une avance cornée de la boîte céphalique, qui envoie au-dessus une courte saillie destinée à les protéger. Les deux derniers articles seulement sont distincts.

(1) Die Forstinselk. 1, 1837.

(2) Entom. Zeit. zu Stettin, 1848.

(3) Hist. d. Ins. d. Pin. marit.. dans les *Ann. d. l. Soc. ent. d. Fr.* 1856, p. 173 et suiv.

Ocelles au nombre de deux de chaque côté, globuleux, placés transversalement en dehors de l'insertion des antennes.

Chaperon médiocre, transversal, largement échancré en avant. Labre arrondi, bombé, cilié en avant.

Mandibules courtes, coniques, robustes, coupées en biseau, à bord tranchant au sommet, concaves en dedans avec une ligne élevée, oblique, dans la concavité, convexes en dehors où leur surface est très-inégale.

Mâchoires charnues (fig. 1^{b}), leur pièce basilaire divisée transversalement par un profond sillon, dans leur moitié externe, un peu en dessous de l'insertion des palpes. Ceux-ci composés normalement de trois articles. Pièce palpigère très-courte et se perdant dans la languette qui est très-large (fig. 1^{b}) et ciliée au sommet.

Prothorax grand, une demi fois plus large que long, rétréci et emboîtant la tête au sommet, muni en dessus et en dessous d'un écusson corné; l'écusson supérieur en ovale transversal, marqué de rides concentriques, rugueux dans sa moitié postérieure, l'inférieur creusé d'un profond sillon en forme de v renversé.

Mésothorax et métathorax plus courts ensemble que le prothorax, marqués en dessus de quelques rides transversales.

Segments de l'abdomen au nombre de neuf avec les sept premiers portant en dessus et en dessous des mamelons très-saillants, charnus, sillonnés par des rides qui forment des dessins divers (fig. 1^{c} et 1^{d}). Les trois derniers munis de bourrelets latéraux.

Dernier segment terminé par le mamelon anal divisé en trois tubercules, au centre desquels s'ouvre l'anus.

Pattes courtes, à articles au nombre de quatre, décroissant graduellement d'épaisseur, très-distincts.

Stigmates en nombre normal; la première paire située dans le pli qui sépare le premier segment du second.

Le corps est glabre (sauf quelques soies disséminées), blanchâtre avec la partie antérieure de la tête brune et les mandibules noirâtres; il est long de 30 à 35 millimètres, presque aussi épais que large, et décroissant graduellement du prothorax au septième segment où il regagne un peu plus de largeur à cause des bourrelets latéraux.

Cette larve vit sous les écorces des pins, dans les régions

très-élevées et très-froides du Mexique. M. Sallé l'a rencontrée, en mai, sur le volcan d'Orizaba, un peu en dessous de la limite inférieure des neiges perpétuelles.

ACROCINUS LONGIMANUS.

Fabr. *Syst. Eleuth.*

LARVE.

(Pl. V, fig. 2).

Tête aplatie, de moitié plus étroite que le prothorax, la base enchassée dans ce dernier, à bouche dirigée en avant. Le dessus lisse, sauf deux légères impressions rapprochées, en arrière du bord antérieur lequel est à peu près droit sur toute la longueur de la base du chaperon, avec une avance de chaque côté de celui-ci; le dessous fortement échancré; les parties latérales marquées de quelques inégalités.

Antennes extrêmement petites et apparaissant, aux angles antérieurs de la tête, sous la forme d'un cône microscopique à trois étages formés par deux sillons circulaires (1).

Un ocelle très-visible, en dessous de chaque antenne.

Chaperon grand, lisse, trapézoïdal; labre aussi long que le chaperon, demi-circulaire, cilié au sommet.

Mandibules très-robustes (fig. 2^{b}), coniques, faiblement arquées, terminées par un bord tranchant coupé en biseau, concaves en dedans avec une arête traversant obliquement la concavité, un peu concaves également en dessous, convexes en dessus et en dehors avec la base marquée de stries transversales.

Pièce cardinale des mâchoires et menton formant ensemble une masse transversale charnue (fig. 2^{a}) où de simples plis représentent les articulations.

Pièce basilaire courte, terminée en dehors par un lobe soudé mais cependant limité à la base par un pli circulaire, cilié au bout. Palpes maxillaires de trois articles de même longueur et diminuant graduellement d'épaisseur.

Pièce palpigère subréniforme très-large, terminée par deux

(1) Le nombre normal des articles est de quatre; l'un d'eux est sans doute rétracté, ici, par l'effet de l'alcool où sont plongées les larves.

palpes biarticulés et une languette échancrée au bout et sillonnée longitudinalement ; le sillon et l'extrémité chargés de poils.

Prothorax très-grand et épais, protégé au-dessus par un vaste écusson subtrapézoïdal échancré au milieu en avant, caréné longitudinalement en arrière et légèrement déclive de chaque côté, très-rugueux et granuleux. Le dessous membraneux et portant quelques granulations.

Deuxième et troisième segments thoraciques moins longs ensemble que le premier, le métathorax présentant en dessus un sillon transversal bordé de granulations.

Segments de l'abdomen s'allongeant graduellement, en diminuant de largeur, du premier au sixième (fig. 2) ; les septième et huitième élargis par un bourrelet longitudinal, latéral ; le neuvième avec un bourrelet visible seulement en dessous, terminé par un très-gros mamelon simulant un dixième segment, lequel mamelon porte l'ouverture anale en forme d'Y, enfoncée entre trois forts replis. Les sept premiers segments portent en dessus et en dessous de larges mamelons aplatis, protégés par un tissu plus résistant, couverts de granulations noirâtres et divisés par des sillons (fig. $2^{c \text{ et } d}$) disposés de la manière suivante : sur les dorsaux, un large sillon longitudinal peu profond, de l'extrémité postérieure duquel partent curvilinéairement, en divergeant et faisant un retour vers le bord antérieur, deux autres sillons plus étroits et plus profonds qui se ramifient à l'extrémité (fig. 2^{c}) ; sur les ventraux, un sillon transversal aux extrémités duquel (fig. 2^{d}) un autre, figurant une sorte de v ou d'Y.

Stigmates normaux. Ceux de la paire thoracique à péritrème en ovale transversal et très-grand, de trois millimètres au moins de largeur, situés latéralement entre le prothorax et le mésothorax.

Pattes tout-à-fait nulles.

Cette larve est longue de 80 mill. ; le prothorax est large de 16 à 18. L'abdomen de 10 à 12 mill. d'épaisseur est aussi haut que large et chacun de ses segments est élargi dans son milieu. Elle est blanche avec le dessous jaunâtre ; les écussons supérieurs ainsi que le dessus des trois divisions postérieures, d'un brun obscur ; la partie antérieure de la tête et les mandibules sont noires. Les deux extrémités, surtout la postérieure, sont

revêtues de poils dorés, épars ; la portion moyenne du corps est presque glabre.

M. Sallé l'a trouvée, à Cordova, au Mexique, sous l'écorce d'un grand arbre nommé *Ceiba* par les habitants, et qui appartient au genre *Ficus*. M. Rojas (1) a déjà donné, dans les termes suivants, quelques détails sur les habitudes de cette espèce, qu'il a observée à Caracas.

« L'*Acrocinus longimanus* Fabr. vit toujours dans les climats froids et sur le *Ficus glabrata*, appelé vulgairement *Higeron* ou *Higuerote*, dont il suce le lait et où je l'ai pris. Sa larve vit toujours dans l'intérieur de cet arbre, et l'insecte parfait, qui l'habite également, en sort régulièrement le matin pour se fixer aux *Ficus* qui n'ont pas été coupés, et s'alimente de son lait. »

« Je les ai pris ainsi et dans leur retraite en fendant à l'aide d'une hache des troncs déjà coupés, où je voyais l'entrée de leur demeure toujours large et ouverte à l'extérieur. J'y ai toujours trouvé assez de larves de ce coléoptère. »

ASTYNOMUS SALLEI.

LARVE.

(Pl. IV, Fig. 4).

Tête aplatie, à demi enchassée dans le prothorax, une demi fois plus étroite que ce dernier, à bouche dirigée en avant. Le dessus impressionné çà et là avec deux impressions plus fortes, rapprochées, transversales ; son bord antérieur largement et régulièrement échancré, muni de cils longs, dirigés en avant. Le dessous présentant deux impressions obliques, linéaires. Les côtés marqués de gros points profonds.

Antennes invisibles (2).

Ocelles nuls.

Chaperon grand, subtrapézoïdal ; lèvre supérieure presque aussi grande que lui, la suture d'insertion droite, le bord libre arrondi et cilié.

(1) Ann. de la Soc. entom. d. Fr. 1857, p. 334.

(2) Les antennes étant très-courtes et rétractiles chez les larves des longicornes, il est possible et même probable qu'elles existent, attendu que les *Astynomus* européens en possèdent.

Mandibules allongées, assez grêles, arquées, échancrées au bout, sillonnées longitudinalement en dehors vers l'extrémité, concaves en dedans, bisillonnées longitudinalement à la base de leur face externe (fig. *e*), paraissant rétrécies au milieu lorsqu'on les regarde de profil.

Mâchoires et lèvre inférieure ne présentant rien de particulier (fig. 4^b).

Prothorax grand, aplati, arrondi sur les côtés et protégé sur les deux faces par un écusson, le supérieur trapézoïdal, l'inférieur elliptique, tous deux lisses dans leur partie antérieure, recouvert d'un velours très-fin en arrière. Deuxième et troisième segments très-courts, un peu plus étroits que le premier, ridés transversalement en dessus et en dessous.

Segments abdominaux diminuant graduellement de largeur et augmentant de longueur du premier au sixième, les derniers un peu élargis et munis latéralement d'un bourrelet mal limité, tous munis sur les côtés d'un mamelon surmonté d'un petit tubercule lisse, oblong, et sur les deux faces d'un mamelon rétréci au milieu en forme de 8 placé transversalement, aplati et marqué de sillons qui forment des dessins réguliers (fig. 4^c). Mamelon anal, simulant un sixième segment, situé à l'extrémité du neuvième ; l'ouverture anale dirigée en arrière, placée au centre de trois tubercules arrondis.

Stigmates en nombre habituel, la première paire située dans le sillon qui sépare le prothorax du mésothorax

Pattes nulles.

M. Sallé a trouvé plusieurs de ces larves une première fois, dans le mois de janvier, sous l'écorce d'un arbre mort, aux environs de Caracas ; ces individus qu'il essaya d'élever, ne réussirent pas. Retourné en mars au même endroit, il en prit d'autres qu'il plaçât dans des conditions meilleures, et qui, cette fois, subirent leur transformation définitive et lui procurèrent des spécimens parfaits.

Nymphe.

(Pl. IV, Fig. 2*d*.)

L'exemplaire que j'ai figuré, le seul que je possède, est une femelle, ainsi qu'on peut le voir à la façon dont se termine

l'abdomen. Elle est relativement large et très-aplatie ; la face dorsale du prothorax et de l'abdomen est couverte d'aspérités et de spinules sensibles au toucher. Pour le reste, elle n'offre rien de particulier.

Insecte parfait.

(Pl. IV, Fig. 2_e).

Voici la description de cette jolie et rare espèce, encore inédite.

Entièrement recouverte d'une courte pubescence serrée et satinée de diverses teintes, qui masque complètement la couleur noirâtre des téguments. Yeux noirs. Pubescence de la tête gris blanchâtre en avant, légèrement teintée de jaune ferrugineux derrière les yeux ; en avant du bord antérieur du prothorax et parallèlement à lui on remarque un collier étroit de poils blancs, se détachant sur un fond dénudé. Antennes deux fois longues comme le corps chez le mâle, une demi fois plus courte chez la femelle, grêles, gris clair, chaque article à partir du troisième terminé par du noir, teinte qui envahit d'autant plus l'article qu'il est plus rapproché de l'extrémité. Prothorax transversal, sa pubescence d'un gris jaunâtre, portant cinq tubercules ; deux latéraux acuminés, deux dorsaux obtus, le cinquième médian, plus en arrière, oblong ; parallèlement aux bords antérieur et postérieur une rangée de gros points noirs. Ecusson de la couleur du prothorax. Elytres larges aux épaules, rétrécies par une courbe régulière jusqu'au sommet où elles sont échancrées, portant chacune deux côtes faibles plus saillantes à la base, revêtues d'une pubescence satinée d'un gris de perle, teintée de jaunâtre dans le quart antérieur, parsemées de gros points noirs irrégulièrement semés, ornées de trois fascies veloutées partant du bord externe et n'atteignant pas la suture, d'un olivâtre obscur, bordées de jaune orange dans leur portion interne : la première, oblique, formée de trois petites taches, placée au quart antérieur, la seconde, au milieu, grande, triangulaire, avec un trait en retour à l'extrémité de l'angle dirigé vers la suture, la troisième oblique mais en sens inverse de la première, constituée par deux taches dont l'externe marginale diffuse, l'interne oblongue, double, nettement bordée de jaune. Dessous et pattes

revêtus de poils d'un gris blanchâtre, subolivâtres ; (cette dernière teinte est due à la couleur des téguments) ; les jambes moins la base et les tarses, obscures. — Long. 16 mill., larg. 6 mill.

CHRYSOMÉLINES.

L'histoire des premiers états des Chrysomélines est à peu près complète en ce qui concerne les genres européens, grâce à la facilité avec laquelle on se procure et on amène à leur dernière métamorphose les larves de cette famille, qui, sous le rapport des habitudes, ont beaucoup d'analogie avec les chenilles.

Vivant, pour la plupart, à découvert sur les végétaux, et exposées par cela même aux attaques de nombreux ennemis, elles ont reçu de la nature des moyens de défense très-variés et fort curieux à étudier. Les unes se recouvrent de leurs excréments qui tantôt restent sur leur dos à l'état pulpeux, tantôt se moulant dans de véritables filières, se dessèchent et forment des abris de structures diverses ; d'autres, semblables à certains mollusques, habitent une coque solide qu'elles traînent après elles et où elles se retirent au moindre danger ; d'autres encore, privées de ces moyens de protection, ont la faculté de faire sortir de leur corps une humeur vénimeuse, à odeur fétide, qui repousse leurs ennemis.

Celles qui se font un abri protecteur de leurs excréments sont, comme on sait, les Criocérides et les Cassidides. La matière excrémentitielle reste chez les premières à l'état pulpeux ; chez les secondes elle se dessèche.

Sauf cette habitude singulière qui les rapproche, les larves de ces deux tribus diffèrent notablement dans la forme générale de leur corps : tandis que les Criocérides ressemblent aux Chrysomélines proprement dites, les Cassidides, elles, ont une tournure toute spéciale qui les éloigne beaucoup des autres groupes de la famille.

J'ai sous les yeux plusieurs de ces larves merdigères qui se rapportent à trois espèces : la *Crioceris viridis* du Mexique,

la *Dolichotoma lanuginosa* de l'Amérique méridionale et la *Porphyraspis palmarum* des Antilles.

Voici leur description :

CRIOCERIS VIRIDIS.

Chevr. *Col. d. Mex.* 1re Cent. nº 79.

LARVE.

(Pl. V, Fig. 3).

Tête assez petite, arrondie, un peu aplatie en dessus, largement sillonnée de la base au sommet, avec quelques rides transversales; à bouche dirigée tout-à-fait en bas et même un peu en arrière, c'est-à-dire que le vertex avance plus que le chaperon.

Ocelles au nombre de six de chaque côté, très-espacés entre eux, quatre formant un quadrilatère sur les parties latérales de la tête, les deux autres disposés longitudinalement en avant des premiers, en dessous des antennes.

Antennes extrêmement courtes, logées dans une petite excavation à bords taillés à pic et paraissant faits à l'emporte-pièce, vers les angles antérieurs de la boîte céphalique, composées de trois anneaux emboités et ne faisant aucune saillie.

Chaperon et labre distincts, larges et courts.

Mandibules petites, peu visibles au repos, pluridentées au sommet.

Mâchoires et lèvre inférieure comme dans les autres larves de *Crioceris*, c'est-à-dire constituées, les premières par une masse charnue terminée en dedans par un lobe aplati et cilié et en dehors par un palpe quadriarticulé; la seconde par une pièce charnue placée entre les mâchoires et terminée par trois petits lobes, un central la languette, deux latéraux représentant les palpes labiaux.

Thorax beaucoup plus étroit que l'abdomen; le prothorax protégé en dessus par un écusson corné, lisse, transversal, sillonné longitudinalement au milieu; le mésothorax et le métathorax mamelonnés en dessus.

Segments abdominaux en nombre normal, grossissant rapidement du premier au quatrième, puis décroissant de même, à

partir du cinquième, les deux derniers très-petits ; la fente anale, transversale, s'ouvrant au centre de plis concentriques.

Stigmates et pattes normaux.

Cette larve (fig. 3) fortement renflée en arrière, atténuée en avant, est glabre, d'un brun olivâtre avec une série de petits mamelons arrondis, d'un vert clair, sur les flancs, et d'autres mamelons de même couleur, plus larges, transversalement oblongs, formant deux rangées sur le dos. Elle est longue de 10 millimètres.

M. Sallé l'a trouvée en juin à Toxpam, au Mexique, sur une plante nommée par les indigènes *Mala muger* (*?*) et dont elle ronge les feuilles à la manière des chenilles. Elle ne porte qu'un peu de matière excrémentitielle molle sur l'extrémité de l'abdomen.

L'insecte parfait se trouve sur la même plante jusqu'en octobre.

DOLICHOTOMA LANUGINOSA.

Boheм. *Monogr. Cassid.* I, p. 190.

LARVE.

(Pl. V, Fig. 4).

Tête de grosseur médiocre, arrondie en arrière, tronquée carrément au sommet, assez épaisse, déprimée sur le front, à bouche dirigée directement en bas, débordée en dessus par le segment prothoracique.

Ocelles très-saillants, au nombre de quatre de chaque côté, placés, sur une ligne transversale un peu arquée, derrière l'insertion des antennes. Un peu en dessous de l'ocelle inférieur il existe une saillie cornée, aplatie au sommet, portant de petits points élevés qui sont peut-être d'autres ocelles de moindre dimension.

Antennes courtes, de deux ou trois articles (1).

Chaperon transversal, atténué aux extrémités, séparé du front, surtout latéralement, par un fort bourrelet.

(1) Il est difficile de décider si l'anneau qu'on observe à la base de l'article terminal doit être considéré comme un article très-court ou simplement comme un repli de la membrane connective.

Labre grand, charnu, formant un angle assez prononcé avec le chaperon, paraissant échancré, mais simplement excavé, au milieu de sa moitié antérieure, cachant les mandibules au repos.

Mandibules, mâchoires et lèvre inférieure comme chez les *Cassida* européennes, à l'exception de la languette qui est nulle (fig. 4e).

Segments thoraciques formant la moitié antérieure du corps; le prothorax aussi grand que les deux suivants réunis, muni sur les bords de huit longues épines à demi cornées, les deux antérieures convergentes, un peu redressées, les autres transversales et plus ou moins horizontales; mésothorax et métathorax portant chacun, de chaque côté, deux épines, dont l'antérieure est subramifiée, dirigées dans le même sens que les dernières du prothorax.

Segments de l'abdomen semblables pour la forme, la consistance et la couleur, aux segments thoraciques, diminuant graduellement de largeur, présentant chacun, en dessus, un sillon transversal et, de chaque côté, une longue épine portée par un tubercule charnu; les épines des septième et huitième segments beaucoup plus longues que les autres; le huitième segment portant en dessus une haute tige cornée, munie de six branches (fig. 4e): les quatre inférieures partant transversalement à angle droit, les deux supérieures contiguës; en dessous de celles-ci le corps de la tige est perforé.

Neuvième segment très-court, représenté par un bourrelet formant la base du mamelon anal, mais séparé de ce dernier par un sillon circulaire très-prononcé; le mamelon, placé immédiatement derrière l'appendice redressé du huitième segment.

Stigmates visibles en dessus, au nombre de huit paires: la première aux angles postérieurs du prothorax, au niveau de la quatrième épine latérale, les autres sur les sept premiers segments de l'abdomen, s'ouvrant en dessus à peu de distance des tubercules spinigères latéraux.

Pattes robustes, très-espacées à l'insertion, à jambe courte (fig. 4f), formant avec la cuisse un angle ouvert en dedans, portant au sommet un petit ongle inséré, non dans l'axe de l'article, mais un peu au dessus.

Dessous du corps présentant, depuis le mésothorax jusqu'au quatrième segment abdominal, sur la ligne médiane, une série

de six cavités arrondies, dont le fond peut se rapprocher et s'éloigner de la surface (ce qui est démontré par de nombreux replis concentriques), faisant probablement l'office de ventouses pour assurer une plus grande fixité à la larve sur le plan de position.

Cette larve est longue de 20 millimètres depuis la tête jusqu'à l'extrémité de l'appendice corné du huitième segment abdominal. Elle est d'un verdâtre brun, avec les épines antérieures et postérieures noires et des taches noirâtres sur le dessus, disposées de la sorte : deux sur chacun des segments du thorax, les antérieures espacées, les postérieures rapprochées, deux également sur chacun des segments de l'abdomen, rapprochées comme celles du métathorax, sauf celles du premier segment qui sont situées près des tubercules spinigères.

De trois spécimens de cette espèce que j'ai sous les yeux, un est encore pourvu de l'abri protecteur formé par les excréments. Celui-ci se présente (fig. 4^b) sous la forme d'une masse lichéniforme à peu près de la grandeur de la larve, mais placée transversalement, de sorte qu'elle ne recouvre qu'à moitié le corps de l'animal. Elle se compose de ramifications noirâtres, parmi lesquelles on retrouve des débris d'épines et de pattes qui proviennent d'une mue antérieure, et est portée par l'appendice corné du huitième segment de l'abdomen.

M. Sallé a trouvé ces larves aux environs de Caracas, dans une localité élevée et froide, sur un arbre dont elles rongeaient les jeunes pousses.

Insecte parfait.

(Pl. V, Fig. 4^e).

Cette espèce, (qui est confondue dans quelques collections avec la *miniata* Boh.), est arrondie, d'un bronzé obscur quelquefois bleuâtre, revêtue d'une pubescence plus ou moins serrée et longue, jaunâtre clair ; son prothorax est subtriangulaire, plus de deux fois aussi large que long, échancré au niveau de la tête, arrondi latéralement, rebordé en avant, assez fortement quadrisinué en arrière, à surface inégale, très-finement et peu densément ponctué, faiblement caréné au milieu en avant, subsillonné en arrière. Elytres rouges avec le pourtour et quelques taches discoïdales

de la couleur du prothorax, fortement gibbeuses au quart antérieur, à côtés dilatés en une large expansion arrondie et un peu redressée, marquées de points peu serrés. — Long. 13-15 mill., larg. 12-14 mill.

PORPHYRASPIS PALMARUM.

Boheм. in litt.

LARVE.

(Pl. V, Fig. 5).

Tête arrondie en arrière, un peu avancée à la bouche, perpendiculaire ; la plaque suscéphalique largement sillonnée au milieu dans toute sa longueur.

Chaperon grand, subrectangulaire.

Ocelles au nombre de six de chaque côté, placés vers les angles antérieurs de la tête et en dessus : quatre sur une ligne oblique, deux plus en dehors, au niveau des deux plus avancés de la première rangée (fig. 5^{b}).

Antennes, mandibules, mâchoires et lèvre inférieure comme chez la précédente.

Corps ovalaire, atténué en arrière, déprimé en dessus, plat en dessous, à thorax plus ample que l'abdomen, les segments de ce dernier portant de chaque côté un tubercule charnu surmonté de deux poils courts.

L'une des plus curieuses, sans contredit, des larves connues, par la manière dont ses excréments sont disposés, pour la protéger. Ceux-ci, en effet, arrangés en une petite masse arrondie, convexe en dessus, concave en dessous, apparaissent sous la forme de fibres verdâtres, enroulés concentriquement, ayant tout-à-fait l'aspect d'un nid d'oiseau en miniature (fig. 5^{a}). La base de ces fibres adhère fortement à la surface du huitième segment abdominal ; je ne pense pas qu'il existe là un appendice faisant l'office de support, comme chez les autres larves de Cassidides.

Il est probable qu'à mesure qu'un nombre plus ou moins considérable de cylindres excrémentitiels, soudés bout à bout et de façon à prendre une direction circulaire, ont formé un fil d'une longueur suffisante, l'animal redresse sa filière anale et agglutine

celui-ci, par sa base encore molle, à la suite des précédents. Au moment de se transformer en nymphe, la larve rejette une plus grande quantité de matière demi-fluide, qu'elle étale sur la feuille choisie à cet effet (fig. 5c). Cette matière, en sèchant, fixe la nymphe et son abri jusqu'à la métamorphose finale.

M. Sallé a trouvé l'espèce à ses différents états sur un palmier qu'il croit être un *Thrinax*, à St Domingue, pendant les mois d'été. Je n'ai point vu l'insecte parfait.

Les espèces suivantes rentrent dans la quatrième division des larves de Chrysomélines, division qui comprend celles dont le corps est nu et qui vivent à découvert sur les végétaux.

LEPTINOTARSA CACICA.

Stål, *Bullet. d. l'Acad. d. Stockholm*, 1858, p. 20.

LARVE.

(Pl. VI, fig. 1.)

La tête n'offre rien de particulier à mentionner ; elle est conformée comme celle des *Chrysomela*, en ce qui concerne les parties de la bouche, les antennes et les ocelles ; sa couleur est d'un olive jaunâtre, clair et brillant.

Le prothorax est aussi long que la tête et plus large, en ellipse transversale, arqué, de même couleur, également lisse et brillant.

Le mésothorax, placé sur un plan beaucoup inférieur, est très-court et plus étroit que le segment précédent, en sorte que le corps paraît étranglé en cet endroit ; il est de la même couleur, mais granuleux et mat ; un sillon le divise transversalement dans toute sa largeur. Le métathorax est plus large et un peu plus long ; il ressemble aux segments de l'abdomen ; son bord antérieur seul est de la couleur des précédents, le reste est noir.

Les segments de l'abdomen vont en grandissant rapidement du premier au quatrième puis en diminuant graduellement depuis celui-ci jusqu'au dernier. Ils sont granuleux, ridés transversalement et d'un noir à peu près mat. Chacun d'eux porte latéralement un long poil blanc. Le segment terminal présente en dessous un double pied anal (fig. 1a et 1b) ; au dessus de ceux-ci l'anus

s'ouvre par une fente transversale entourée de six mamelons, un supérieur, deux latéraux et trois inférieurs.

Le dessus de l'abdomen est fortement bombé dans les deux sens; le dessous est à peu près plat dans le sens transversal et concave longitudinalement. La séparation des segments est à peine indiquée par un faible sillon en dessus; en dessous ces sillons sont profonds.

Les pattes sont grandes et de la couleur de la tête et du prothorax.

Les stigmates sont en nombre et en position ordinaires; sur les segments de l'abdomen ils s'ouvrent au-dessus d'un mamelon qui forme la limite latérale de chaque arceau dorsal.

M. Sallé a trouvé cette larve, en nombre, sur une plante à larges feuilles dont il ignore le nom, dans la baranca de Rio-Seco, près de Cordova au Mexique, en novembre.

Insecte parfait.

Cette Chrysomèle est d'un vert métallique brillant, légèrement teinté de bleuâtre, avec les élytres testacées, bordées étroitement de vert noirâtre. La tête est à peine ponctuée. Le prothorax est assez fortement et éparsément ponctué sur les côtés. Les élytres sont très-bombées, marquées de trois nervures longitudinales, lisses, peu apparentes, et de points assez gros, inégalement et assez densément semés. — Long. 16 mill.; larg. 10 mill.

LEPTINOTARSA VITTATA.

Baly, *Trans. of the entom. Soc.* 1857.

Zygogramma Schuppelii. Dej. *Cat.* ed. 3, p. 422.

LARVE.

(Pl. VI, Fig. 2.)

Mêmes formes générales que la précédente, mais plus luisante, entièrement glabre, d'un jaune clair avec les mandibules, les ocelles, les genoux et les stigmates noirs. M. Sallé l'a rencontrée dans les mêmes conditions, aux environs de Véra-Cruz, en septembre.

Insecte parfait.

Cette jolie espèce est plus petite que la *cacica*, d'un vert métallique brillant, avec la base des antennes, les palpes, la moitié inférieure des jambes et les tarses d'un rougeâtre clair. Les élytres sont testacées et ornées, chacune, de quatre bandes longitudinales étroites, raccourcies, noires.

EROTYLIENS.

DACNE FASCIATA.

Fabr. *Syst. Eleuth.* II, p. 582.

LARVE.

(Pl. VI, Fig. 6.)

Tête petite, presque verticale, à bouche dirigée, par conséquent, en bas; la plaque suscéphalique peu convexe, fortement biimpressionnée.

Ocelles au nombre de six de chaque côté : quatre formant un groupe placé latéralement près de la cavité antennaire, les deux autres en dessous, entre cette même cavité et le cadre buccal.

Antennes courtes, de trois articles à peu près de même longueur et diminuant graduellement d'épaisseur, le premier porté par une avance simulant un article basilaire.

Chaperon et labre distincts, celui-ci sillonné longitudinalement.

Mandibules courtes, arquées, cachées au repos, dentées au sommet.

Mâchoires charnues, courtes, espacées, terminées, en dedans, par un lobe soudé et offrant au sommet des aspérités et quelques poils spiniformes, en dehors, par un palpe de trois articles décroissant graduellement en longueur et en épaisseur, porté sur une avance ou faux article basilaire.

Lèvre inférieure composée d'un menton aussi large que long, largement échancré en demi cercle en avant ; d'une pièce palpigère à deux lobes, surmontés chacun d'un palpe court, biarticulé.

Segments thoraciques et abdominaux semblables, sauf le prothorax qui est un peu plus long et plus étroit que les suivants ; séparés par des sillons profonds, protégés en dessus par des écussons cornés moins larges qu'eux et couverts de granulations lisses, leurs côtés (fig. 6ª) et leur face ventrale divisé par des sillons en mamelons arrondis ou triangulaires ; le dernier armé en dessus de deux courtes saillies cornées, acuminées, granuleuses. L'anus s'ouvrant par une fente étoilée au centre d'un mamelon arrondi.

Stigmates en nombre et position habituels.

Pattes courtes ; le sommet des hanches offrant une petite saillie en dedans.

Le corps de cette larve, long de 20 millimètres, est cylindrique, brusquement rétréci aux extrémités, d'un jaunâtre clair avec les écussons bruns. Son caractère le plus remarquable est l'étranglement très-prononcé qu'il offre à chaque articulation des segments et la quantité de mamelons que présentent ses faces ventrales et latérales : chaque segment présente neuf mamelons, dont quatre arrondis ou ovales et cinq triangulaires.

Elle vit, à la Nouvelle-Orléans, dans les souches de saules à demi décomposées et imprégnées de végétations fongueuses.

L'insecte parfait est bien connu.

ISCHYRUS FLAVITARSIS.

Lacord. *Monogr. d. Erot.* p. 150.

LARVE.

(Pl. VI, Fig. 5.)

On connaît déjà (1) la larve d'une espèce de ce genre, l'*I. quadripunctatus*, de la N^lle^ Orléans. J'aurai donc peu de chose à dire de sa congénère, que M. Sallé a trouvée en juillet, à ses

(1) Chap. et Cand. Cat. des larves etc., in Mém. d. la Soc. d. Sciences de Liége VIII, p. 622.

différents états, sous l'écorce d'une vieille souche tapissée de blanc de champignons, à S^t^ Domingue.

Elle est de même forme ; la tête et ses différents organes sont façonnés sur le même modèle ; les segments du corps sont également protégés en dessus par des écussons cornés, sur lesquels on remarque des séries transversales de tubercules de même consistance, mais l'appendice du dernier segment est autrement fait : il consiste en une tige courte, charnue, se divisant à peu de distance de la base en deux épines rugueuses, qui s'écartent d'abord pour se recourber un peu l'une vers l'autre au sommet. Cet appendice rappelle, en raccourci, la forme d'une pince de Forficule.

Le corps est long de 10 millimètres, brun en dessus, avec le prothorax et le dernier segment, y compris l'appendice, rougeâtres ; le premier orné en outre de deux taches noires. Le dessous est uniformément d'un blanchâtre sâle.

EPISCAPHA QUADRIMACULA.

Wiedm. *Zool. Mag.* II, fasc. I, p. 132, 199.

LARVE.

(Pl. VI, Fig. 4.)

Tête inclinée, assez grande, aplatie et longitudinalement biimpressionnée en dessus, parsemée de quelques petites saillies spiniformes.

Ocelles au nombre de six de chaque côté, placés sur deux lignes convergentes, les quatre supérieurs placés sur une tache noire (la tête est jaunâtre) qui les fait ressortir.

Antennes dirigées en dehors, de trois articles, le moyen le plus long, cylindrique, le dernier très-petit.

Chaperon et lèvre supérieure bien limités, celle-ci divisée longitudinalement par plusieurs sillons.

Mandibules courtes et cachées au repos, dentées au sommet.

Mâchoires et lèvre inférieure (fig. 4^b^) comme chez les *Ischyrus*.

Prothorax deux fois plus large que long, arrondi sur les côtés, corné en dessus, divisé en trois bourrelets égaux par deux sillons

transversaux, son pourtour et le bourrelet moyen garnis d'une multitude de petites épines.

Deuxième et troisième segments du thorax et segments 1 — 8 de l'abdomen semblables entre eux, plus courts de moitié que le prothorax, armés en dessus d'une rangée transversale d'épines.

Dernier segment portant en dessus deux appendices (fig. 4c) charnus, terminés en pointe, chargés de spinules, divergeant et formant un v; la rangée transversale d'épines placée en arrière de ces appendices, entre ceux-ci et le pied anal qui est divisé longitudinalement.

Stigmates en nombre et position ordinaires, ceux de l'abdomen s'ouvrant en dessous du bord externe de l'écusson corné, et au dessus d'un tubercule spinigère qui sépare l'arceau inférieur du supérieur, à chaque segment.

Pattes assez grandes.

Corps long de 15 à 16 millimètres, en ovale allongé, médiocrement convexe en dessus, aplati en dessous, jaunâtre, le prothorax avec deux bandes longitudinales rapprochées et une tache de chaque côté sur le bord antérieur, noires, les écussons supérieurs des autres segments brunâtres, avec les épines noires.

M. Nietner a trouvé cette espèce, à différents degrés de développement, sous des écorces tapissées de matière fongueuse, à Ceylan.

Nymphe.

(Pl. VI, Fig. 2d.)

Le corps de la nymphe, qui est d'un blanc jaunâtre, est chargé en dessus de spinules comme la larve; ces spinules sont noires sur la ligne médiane, et disposées de la manière suivante : deux groupes de deux au bord antérieur du prothorax, un groupe de 6 à 8 en arrière du même segment; deux groupes de deux sur les deux segments suivants et une rangée transversale sur chaque anneau de l'abdomen. Le dernier segment est, comme chez la larve, terminé par deux appendices spiniformes, mais ici ces appendices sont lisses.

Insecte parfait.

Ovale, allongé, bombé en dessus, aplati en dessous, d'un beau noir satiné, aspect qui est dû à une pubescence couchée, de même couleur; les élytres ornées chacune de deux taches rouges, transversales, n'atteignant pas la suture, la première rapprochée du bord antérieur auquel elle tient par une branche que lui envoie sa partie moyenne, la seconde sinuée sur les bords; ces taches sont glabres; tout le corps est également, finement et assez densément ponctué. — Long. 18 mill., larg. 5 mill.

AMBLYOPUS CINCTIPENNIS.

LACORD. *Monogr. des Erot.* p. 199.

M. Nietner m'a également communiqué des larves de cette espèce qu'il a trouvées dans les mêmes conditions que la précédente.

Sous le rapport de la forme et de l'aspect général elles se rapprochent davantage des *Ischyrus* que des *Episcapha*, c'est-à-dire qu'elles sont plus étroites que ces dernières et ne sont pas, comme elles, hérissées d'épines.

La tête est marquée de deux profondes fossettes.

Les écussons des segments sont impressionnés çà et là et parsemés de quelques petites spinules à peine visibles; le dernier segment est terminé par deux appendices simples, courts.

Pour le reste, cette larve, dont la taille est de 8 millimètres et la couleur d'un blanc sâle, ne présente rien de particulier à mentionner.

Insecte parfait.

M. Lacordaire a fait connaître cette espèce qui est de la grandeur de notre *Triplax russica*, glabre, brillante, rougeâtre avec trois taches placées transversalement sur le prothorax et les élytres, sauf le pourtour, noires.

ÆGITHUS QUADRINOTATUS.

Chevr. *Col. d. Mex.* 1e Centurie.

Aegithus funerarius (Dej.) Lac. *Monogr. d. Erot.* p. 283.

L'analogie qui existe entre les larves de la famille actuelle et celles des Coccinellides a déjà été signalée à propos de l'*Ischyrus quadripunctatus*. Chez l'espèce dont il est ici question, cette analogie devient tellement frappante, qu'au premier abord on prendrait sa larve pour celle d'une Coccinellide de la division des Chilocoriens, ainsi qu'on peut le voir par la figure.

LARVE.

(Pl. VI, Fig. 3.)

Tête médiocre, verticale, subtriangulaire ; la plaque sus-céphalique creusée par deux profonds sillons longitudinaux.

Ocelles au nombre de cinq de chaque côté, placés en un seul groupe derrière la cavité antennaire : trois sur un rang, en avant, deux sur un rang parallèle, en arrière.

Antennes longues, de trois articles, le premier court, implanté sur une avance de la boîte céphalique simulant un faux article, le second cinq ou six fois plus long, le dernier de la longueur du premier mais beaucoup plus grêle.

Chaperon distinct, transversal, court ; labre deux fois plus long, moins large, arrondi, bombé, fovéolé au milieu.

Mandibules cachées au repos, de forme ordinaire.

Mâchoires et lèvre inférieure comme chez les précédentes : le menton, seulement, plus étroit et triangulaire.

Segments du corps tous semblables, portant des tiges charnues (fig. 3) garnies de longs poils et placées en séries transversales ; ses tiges au nombre de quatorze et disposées sur deux rangs sur le prothorax, de huit en un seul rang sur les neuf segments suivants, de six sur l'avant dernier, enfin de quatre sur le neuvième; le pied anal tout-à-fait à l'extrémité. Les poils que portent ces tiges ne sont pas lisses, mais paraissent composés d'articles nombreux, ce qui, sous une forte loupe, les fait paraître moniliformes.

Stigmates en nombre normal ; la première paire située latéralement près du bord antérieur du mésothorax ; les autres au dessus des tiges les plus externes des segments abdominaux.

Pattes longues, les hanches présentant sur leur face externe une fossette oblongue.

Corps ovale, long de 12 millimètres, large de 5 $^1/_2$, convexe et brunâtre en dessus, presque plat et blanc sale en dessous, les quatre tiges moyennes de chaque segment et les deux externes noires, les deux autres et tous les poils d'un jaunâtre clair, une tache sur la tête et les pattes brunes.

Comme on doit le supposer par la nature hérissée des téguments, ces larves ne vivent pas, comme celles des autres Erotyliens, sous les écorces, mais bien à découvert sur les souches couvertes de végétations fongueuses. Elles établissent encore ainsi un passage bien marqué entre les larves des vrais Erotyliens et celles des Coccinellides phytophages.

Nymphe.

(Pl. VI, fig. 3^b.)

Elle est tout-à-fait semblable à celle des Coccinellides ce qui résulte évidemment du genre de vie de l'animal. Elle reste enveloppée en partie par la dépouille de la larve et se tient attachée par l'extrémité du corps, le prothorax seul est dégagé.

Insecte parfait.

Subrhomboïdal, bombé, lisse et brillant, glabre, noir, avec les élytres d'un jaune verdâtre très-clair et ornées de quatre taches noires, deux sur chacune : la première grande, oblique, ovale, la seconde arrondie, plus petite ; la suture également noire. — Long. 9 mill., larg. 6 $^1/_4$ mill. (*V. Chevr. l. c.*)

Du Mexique.

COCCINELLIDES.

DAULIS SANGUINEA.

Linn. *Syst. nat.* I, p. 579, 3.

Var. *Immaculata* Fab. *Entom. Syst.* II, p. 267, 5.

LARVE.

(Pl. VI, fig. 7.)

Elle a la forme générale et le système de coloration de nos Coccinelles aphidiphages, dont elle ne diffère pas non plus dans les détails de son organisation. Je me borne donc à la figurer pour montrer la disposition des taches sur son corps. M. Sallé l'a trouvée, à la Nouvelle-Orléans, sur une plante chargée de pucerons. Il a observé que la larve ne fait pas seulement sa proie de ces derniers, mais qu'elle dévore aussi les œufs et les jeunes larves de son espèce.

EPILACHNA PROTEUS.

Muls. *Monogr. d. Coccin.* p. 75.

LARVE.

(Pl. VI, fig. 8.)

Elle ressemble à la larve bien connue de l'*E. argus*, que l'on trouve sur la bryone. La plante dont se nourrit celle-ci est une solanée à feuilles grandes, velues et épineuses, qui croit dans les lieux élevés et froids, aux environs de Caracas.

Son corps est long de 13 à 14 millimètres, hérissé d'épines ramifiées (fig. 8ª), disposées en rangées transversales de six sur chaque segment. Il est entièrement noir en dessus, y compris les épines, et blanchâtre en dessous.

La nymphe n'offre aucune particularité qui la distingue de celle de l'*E. argus*.

CHILOCORUS CIRCUMDATUS.

Gyll. in Schönh. *Syn. Insect.* II, p. 152.

LARVE.

(Pl. VI, fig. 9.)

On connaît les larves des *Chilocorus* de notre pays. Celle-ci ne réclame pas par conséquent une description minutieuse. Elle est longue de 7 à 8 millimètres, hérissée, comme les autres, d'épines garnies de quelques poils raides (fig. 9ª) et disposées six par six en autant de séries qu'il y a de segments, sauf le prothorax qui porte dix épines en deux rangées, le pénultième qui n'en a que quatre et le dernier qui en est dépourvu.

Sa couleur est d'un blanc sale avec une tache noire à l'insertion de chaque épine ; les taches confondues sur le prothorax en une grande, divisée seulement par le milieu.

Elle est de Ceylan ; j'ignore sur quelle plante elle vit.

NOTE.

J'ai mentionné, page 349, une larve d'Élatéride de grande taille, provenant de Ceylan et ayant de grands rapports avec celle de l'*Alaus oculatus*, ce qui me faisait soupçonner qu'elle pouvait appartenir à l'*A. speciosus* L.

Depuis, M. Nietner a confirmé cette opinion en m'assurant que cette larve est très-probablement celle de l'espèce en question, qu'il trouve, à l'état parfait, dans les mêmes localités.

Voici ses caractères :

ALAUS SPECIOSUS ?

Linn. *Syst. nat.* II, 652, 2.

LARVE.

(Pl. VI, fig. 10.)

Tête grande, bien dégagée du prothorax, quadrangulaire, aplatie en dessus et en dessous.

Plaque suscéphalique très-inégale et marquée en outre de deux sillons longitudinaux rapprochés et de gros points épars, plus serrés à la base.

Un ocelle, très-distinct, situé latéralement, en arrière de l'insertion des antennes.

Chaperon et labre nuls.

Antennes, mandibules, mâchoires et lèvre inférieure conformées comme celles de l'*A. oculatus*.

Prothorax près de deux fois aussi long que le segment suivant, protégé en dessus et latéralement par une plaque cornée, lisse, marquée seulement de quelques gros points sur les parties latérale et antérieure et d'une ligne médiane longitudinale enfoncée.

Segments suivants constitués de même à ceci près qu'ils sont plus courts, le dernier (fig. 10ª), aplati et rugueux en dessus, terminé par deux fortes saillies coniques à épine terminale recourbée en haut, et présentant, à leur base, quelques petits tubercules acuminés.

Stigmates grands, en nombre et position ordinaires, leur péritrème conformé exactement comme chez l'*A. oculatus*.

Pattes assez grandes, de forme normale.

Dessous et côtés de l'abdomen présentant des mamelons de diverses formes et protégés par une plaque cornée, disposés ainsi qu'il suit sur chaque segment : un grand, médian, en forme de trapèze, marqué de deux sillons longitudinaux ; un ovalaire de chaque côté de celui-ci, enfin un autre tout-à-fait latéral, également ovale, mais plus grand ; c'est entre ce dernier et le grand écusson dorsal que se trouve le stigmate.

Pied anal saillant, en cône tronqué.

Le corps est long de 60 millimètres, d'un noir très-brillant en dessus, blanchâtre dans l'intervalle des mamelons en dessous, ceux-ci bruns. Chaque segment porte une série transversale de longs cils bruns, plus quelques uns disséminés, sur les parties latérales. Il est presque cylindrique considéré dans son ensemble, avec des rétrécissements aux points de jonction des segments.

Cette larve vit en terre.

La figure 11 de la pl. VI représente une larve dont j'ai reçu deux spécimens sans nom, de M. Nietner. Elle appartient probablement à quelque Hétéromère. Je l'ai dessinée pour montrer la structure singulière du dernier segment de l'abdomen (fig. 11ª), qui est coupé obliquement et profondément creusé en forme de cupule. Cette larve est glabre, d'un jaune brillant, avec la tête et les deux derniers segments d'un rougeâtre obscur. Elle est de Ceylan et vit sous le gazon.

La larve figurée sous le numéro 12 est une larve de *Lycide* extrêmement remarquable, du même pays. Chaque segment, sauf le dernier, est garni en arrière, sur son écusson, d'une

série demi-circulaire de tubercules très-saillants, arrondis, lisses; le dernier segment est aplati, carré, avec les deux angles postérieurs prolongés en arrière. Tout le corps est glabre et d'un noir brillant, avec les tubercules du premier segment de l'abdomen, les appendices du dernier et les pattes d'un jaune clair.

Il y a dix paires de stigmates. Outre les neuf normales, on en trouve une très-distincte entre le mésothorax et le métathorax.

Les différentes pièces de la tête sont conformées comme chez le *Lycus cinnabarinus*. Les mandibules sont seulement plus longues, et apparaissent sous la forme de deux épines divergentes.

EXPLICATION DES PLANCHES.

Planche I.

Fig. 1. *Galerita nigra ;* larve de grandeur naturelle.
1ª Tête grossie vue en dessus ; — 1ᵇ ocelles.

Fig. 2. *Pœderus tempestivus ;* larve grossie.
2ª Tête grossie vue en dessus ; — 2ᵇ la même vue en dessous ; — 2ᶜ ocelles ; — 2ᵈ antenne ; — 2ᵉ palpe maxillaire ; — 2ᶠ lèvre inférieure 2ᵍ appendices terminaux de l'abdomen.

Fig. 3. *Osorius intermedius ;* larve grossie.
3ª Tête vue en dessus ; — 3ᵇ dernier segment de l'abdomen.

Fig. 4. *Leptochirus scoriaceus ;* larve grossie.
4ª Tête grossie vue en dessus ; — 4ᵇ la même en dessous ; — 4ᶜ dernier segment de l'abdomen.

Fig. 5. *Platysoma Marseulii ;* grossi.
5ª Mesure de la grandeur réelle ; — 5ᵇ jambe antérieure.

Fig. 6. *Amphicrossus discolor ;* larve grossie.
6ª Tête grossie vue en dessus ; — 6ᵇ la même en dessous ; — 6ᶜ dernier segment de l'abdomen ; — 6ᵈ mandibule.

Planche II.

Fig. 1. *Brontes crenicollis ;* larve grossie.
1ª Tête grossie vue en dessus ; — 1ᵇ la même en dessous ; — 1ᶜ dernier segment de l'abdomen ; — 1ᵈ nymphe, grossie ; — 1ᵉ insecte parfait, grossi.

Fig. 2. *Canthon volvens ;* larve grossie.
2ª Bouche vue en dessus ; — 2ᵇ la même vue en dessous ; — 2ᶜ mandibule ; — 2ᵈ antenne ; — 2ᵉ nymphe, face dorsale ; — 2ᶠ nymphe face ventrale.

Fig. 3. *Ancylonycha fusca ;* larve de grandeur naturelle.
3ª Tête grossie vue en dessus ; — 3ᵇ la même vue en dessous ; — 3ᶜ mandibule.

Fig. 4. *Serica nitida.*
4ª Labre de la larve, grossi ; 4ᵇ mandibule de la même.

Fig. 5. *Campsosternus Templetonii ;* larve de grandeur naturelle.

5ª Parties de la bouche en dessus; — 5ᵇ tête, vue en dessous; — 5ᶜ mâchoires et lèvre inférieure; — 5ᵈ labre; — 5ᵉ mandibule, face externe; — 5ᶠ un des segments thoraciques vu en dessous pour montrer la brièveté relative et la disposition des pattes; — 5ᵍ dernier segment de l'abdomen vu de face; 5ʰ le même vu de profil.

Planche III.

Fig. 1. *Lycus cinnabarinus;* larve de grandeur naturelle.
1ª Tête grossie vue en dessus; — 1ᵇ la même, dégagée du prothorax, vue en dessous; — 1ᶜ la même invaginée dans le prothorax; — 1ᵈ nymphe; — 1ᵉ insecte parfait.

Fig. 2. *Colapteron corrugatum;* larve grossie.
2ª Nymphe; — 2ᵇ insecte parfait.

Fig. 3. *Photuris congrua;* larve de grandeur naturelle.
3ª Tête grossie vue en dessus; — 3ᵇ la même vue en dessous et sortie du prothorax; — 3ᶜ sommet de la lèvre inférieure; — 3ᵈ un des écussons grossi d'un segment abdominal.

Fig. 4. *Photuris trilineata;* un écusson grossi d'un des segments de l'abdomen.

Fig. 5. *Photuris pensylvanica;* mandibule.

Fig. 6. *Lordites glabricula;* dernier segment de l'abdomen.

Fig. 7. *Catorama palmarum;* larve grossie.

Fig. 8. *Pterogenius Nietneri;* larve grossie.
8ª Tête grossie vue en dessus; — 8ᵇ la même en dessous; — 8ᶜ dernier segment de l'abdomen vu de profil; — 8ᵈ le même vu de demi-face; 8ᵉ insecte parfait, grossi.

Fig. 9. *Bolitotherus cornutus;* larve grossie.
9ª Tête vue en dessus; — 9ᵇ la même, en dessous, avec la première paire de pattes; — 9ᶜ dernier segment de l'abdomen, en dessous; — 9ᵈ antenne de l'insecte parfait.

Planche IV.

Fig. 1. *Rhynchophorus Zimmermanni;* larve de grandeur naturelle, vue de profil.
1ª Face ventrale de la même; — 1ᵇ tête grossie vue en dessus; — 1ᶜ mâchoires et lèvre inférieure; — 1ᵈ nymphe, face dorsale; — 1ᵉ nymphe, face ventrale; — 1ᶠ nymphe dans sa coque.

Fig. 2. *Anchonus cristatus;* larve grossie.
2ª Tête grossie vue en dessus; — 2ᵇ dessous de la tête et du thorax grossi; — 2ᵈ insecte parfait grossi.

Fig. 3. *Baridius vestitus;* larve grossie.
3ᵉ Tête grossie, en dessus; — 3ᵇ mâchoires et lèvre inférieure; —

3[c] extrémité d'une des mâchoires ; — 3[d] nymphe dans sa coque ; — 3[e] section d'un fragment de tige de tabac, avec une coque fixée dans la moelle.

Fig. 4. *Astynomus Sallei ;* larve de grandeur naturelle.
4[a] Tête grossie vue en dessus ; — 4[b] la même en dessous ; — 4[c] mandibule de profil ; — 4[d] un tubercule dorsal de l'abdomen ; — 4[e] nymphe ; — 4[f] insecte parfait.

Planche V.

Fig. 1. *Trichoderes pini ;* larve de grandeur naturelle.
1[a] Tête grossie vue en dessus ; — 1[b] parties de la bouche, en dessous ; 1[c] un des écussons dorsaux de l'abdomen ; — 1[d] un des écussons ventraux.

Fig. 2. *Acrocinus longimanus ;* larve de grandeur naturelle.
2[a] Tête grossie vue en dessous ; — 2[b] mandibule face supero-externe ; — 2[c] un des écussons dorsaux de l'abdomen, grossi ; — 2[d] un des écussons ventraux.

Fig. 3. *Crioceris viridis ;* larve grossie.

Fig. 4. *Dolichotoma lanuginosa ;* larve grossie vue en dessus.
4[a] La même vue de profil ; — 4[b] la même recouverte de ses excréments ; — 4[c] tête grossie vue en dessous (*a* labre ; *b* antennes ; *c* ocelles ; *d* mandibules ; *e* mâchoires ; *f* lèvre inférieure) ; — 4[d] deux des segments de l'abdomen vus en dessous pour montrer les ventouses qui les garnissent ; — 4[e] dernier segment de l'abdomen et appendice du huitième ; — 4[f] une des pattes ; — 4[g] insecte parfait ; — 4[h] profil du même.

Fig. 5. *Porphyraspis palmarum ;* larve grossie.
5[a] La même vue en dessous, avec son abri ; — 5[b] tête grossie vue en dessus ; — 5[c] nymphe avec son abri.

Planche VI.

Fig. 1. *Leptinotars cacica ;* larve grossie.
1[a] Pied anal avec l'anus ; — 1[b] le même vu de profil.

Fig. 2. *Leptinotarsa vittata ;* larve grossie.

Fig. 3. *Aegithus quadrinotatus ;* larve grossie.
3[a] Une tige charnue avec ses poils, grossie ; — 3[b] nymphe grossie.

Fig. 4. *Episcapha quadrimacula ;* larve grossie.
4[a] Tête vue en dessus ; — 4[b] mâchoires et lèvre inférieure ; — 4[c] dernier segment de l'abdomen ; — 4[d] nymphe.

Fig. 5. *Ischyrus flavitarsis ;* larve grossie.

Fig. 6. *Dacne fasciata ;* larve de grandeur naturelle, face dorsale.
6[a] La même vue de profil ; — 6[b] tête grossie.

Fig. 7. *Dauris sanguinea ;* larve grossie.
7ª Nymphe ; — 7ᵇ œufs.

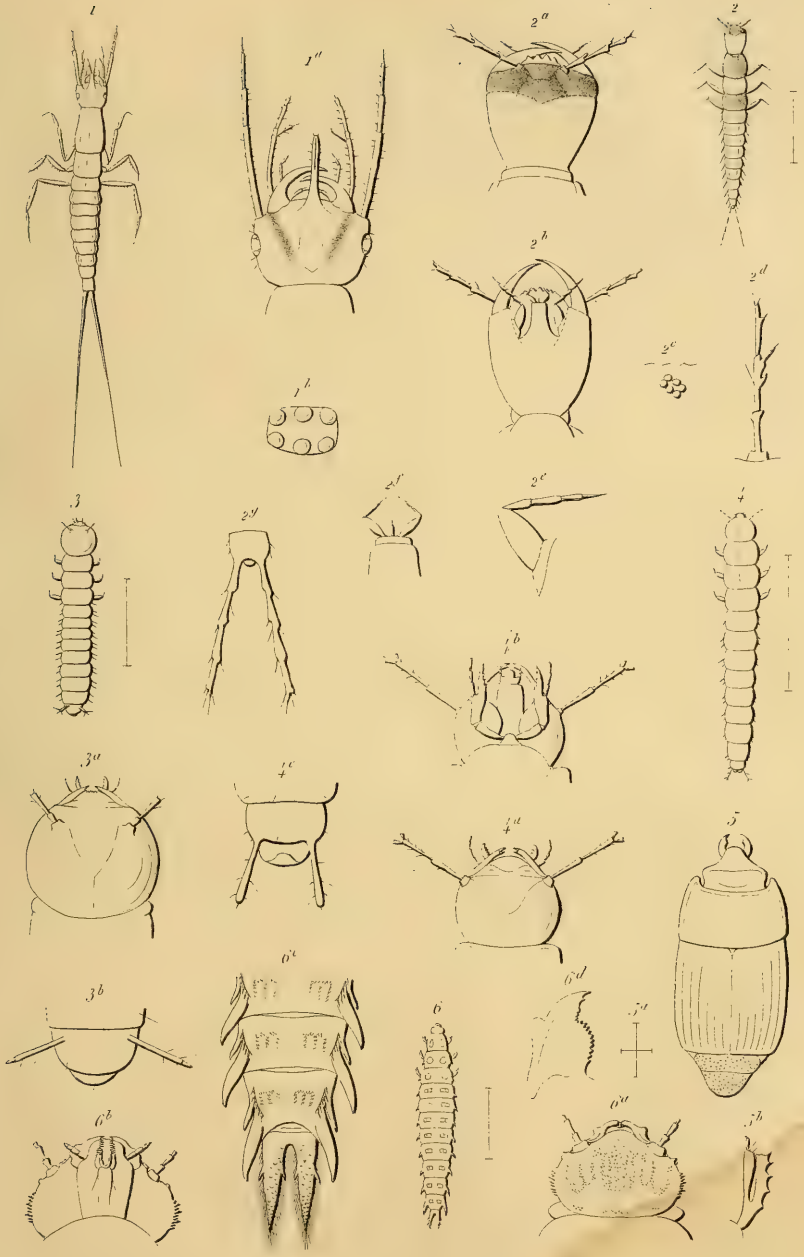
Fig. 8. *Epilachna proteus ;* larve grossie.
8ª Un des poils ramifiés du corps.

Fig. 9. *Chilocorus circumdatus ;* larve grossie.
9ª Un des poils ramifié du corps.

Fig. 10. *Alaus speciosus ? ;* larve de grandeur naturelle.
10ª Dernier segment de l'abdomen.

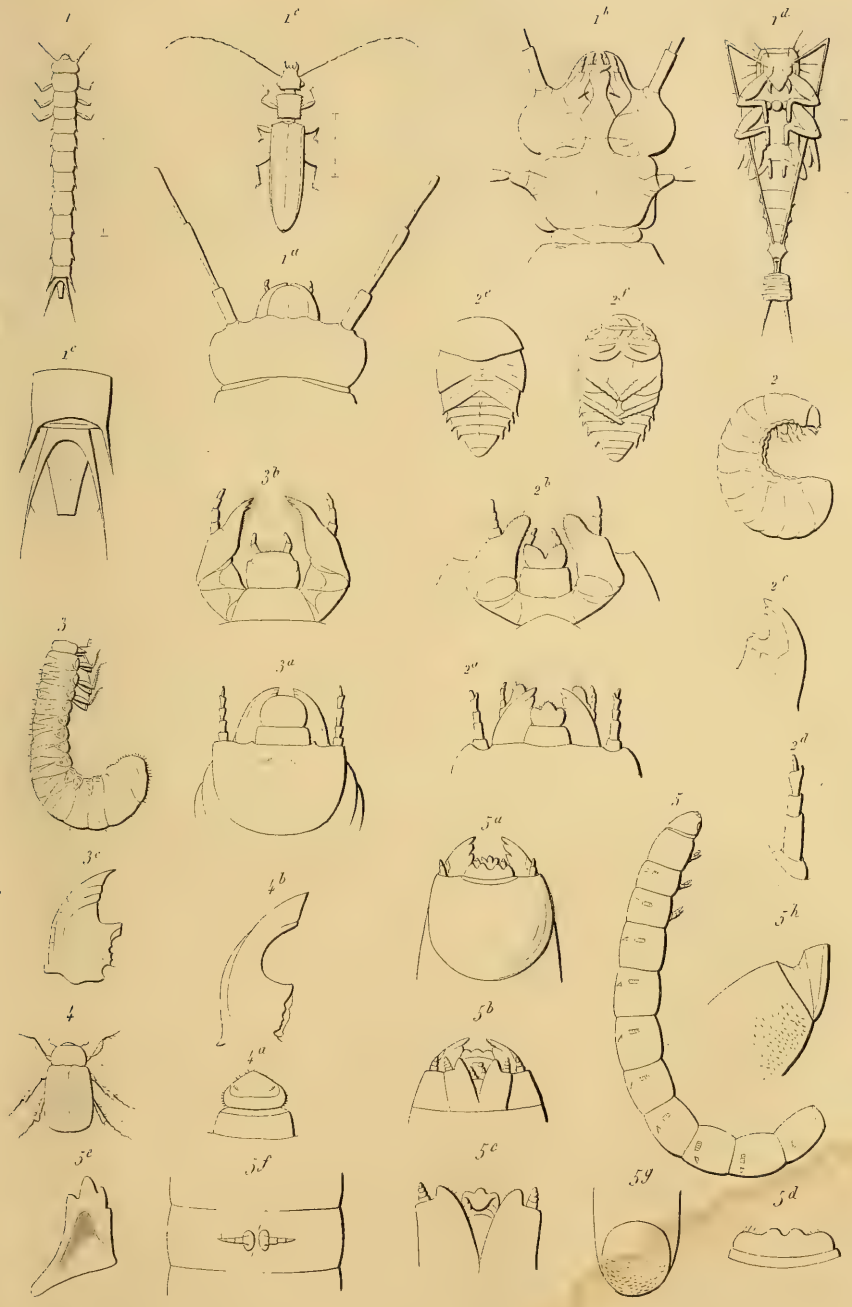
Fig. 11. Larve d'un Hétéromère de Ceylan.
11ª Dernier segment de l'abdomen.

Fig. 12. Larve d'un Lycide de Ceylan.

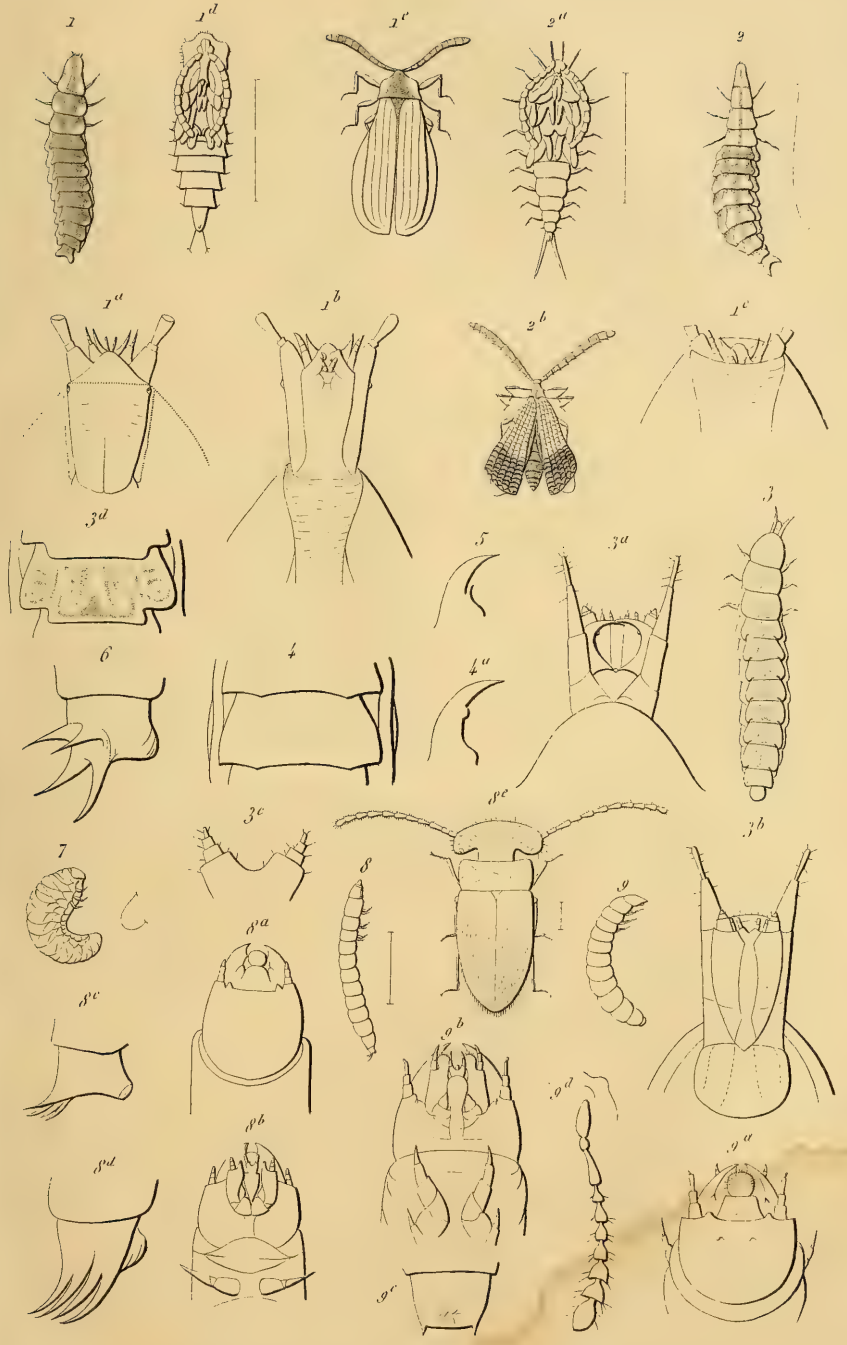


Candèze del. Lith. de H. Dessain.

1 GALERITA NIGRA *Chevr.*—2 PŒDERUS TEMPESTIVUS *Erichs.*—3 OSORIUS INTERMEDIUS *Erichs.*
4 LEPTOCHIRUS SCORIACEUS *Germ.*—5 PLATYSOMA MARSEULII *Cdz.*
6 AMPHICROSSUS DISCOLOR *Erichs.*

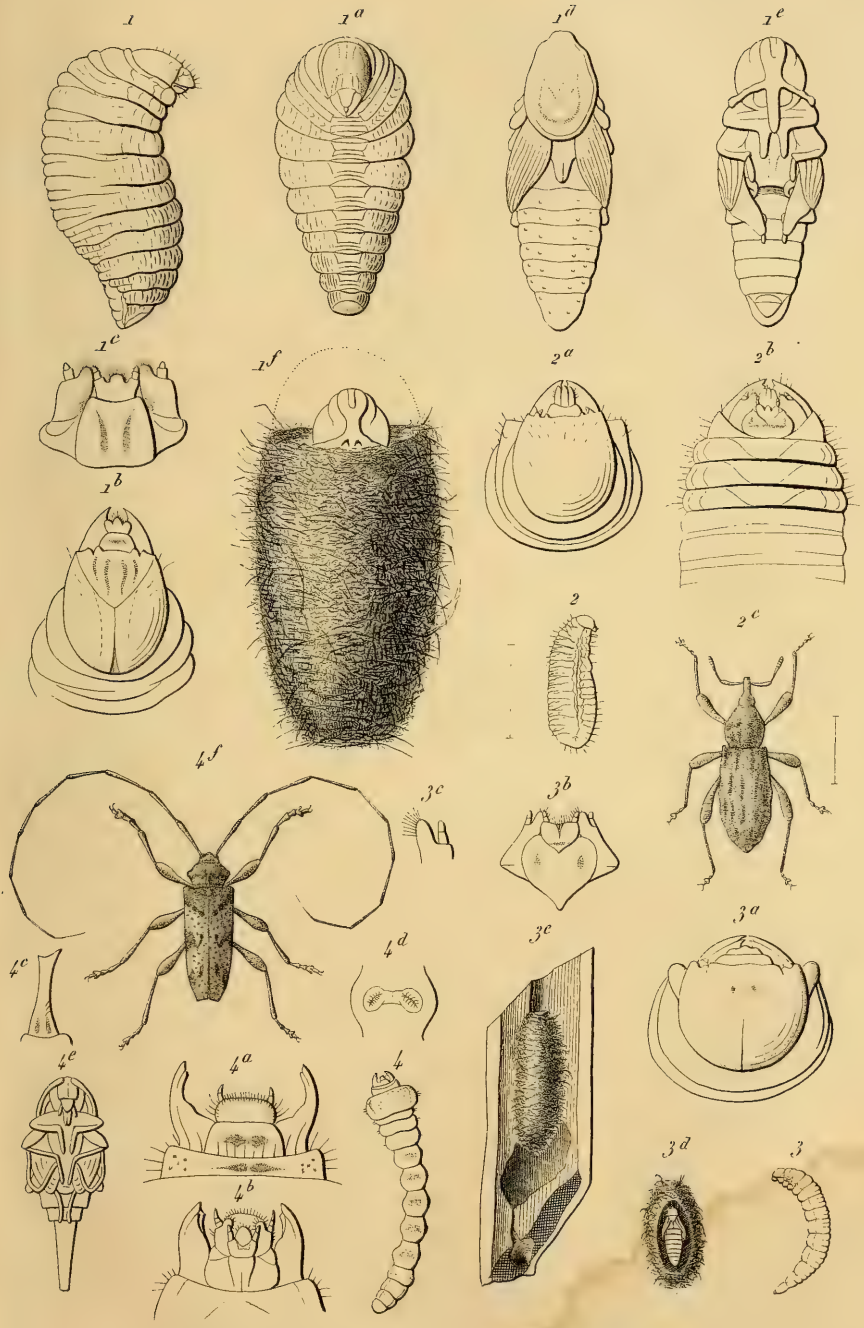


1 BRONTES CRENICOLLIS *Cdz* – 2 CANTHON VOLVENS *Fabr* – 3 ANCYLONYCHA FUSCA *Fiel*
4 SERICA NITIDA *Cdz* – 5 CAMPSOSTERNUS TEMPLETONII *Hope*.

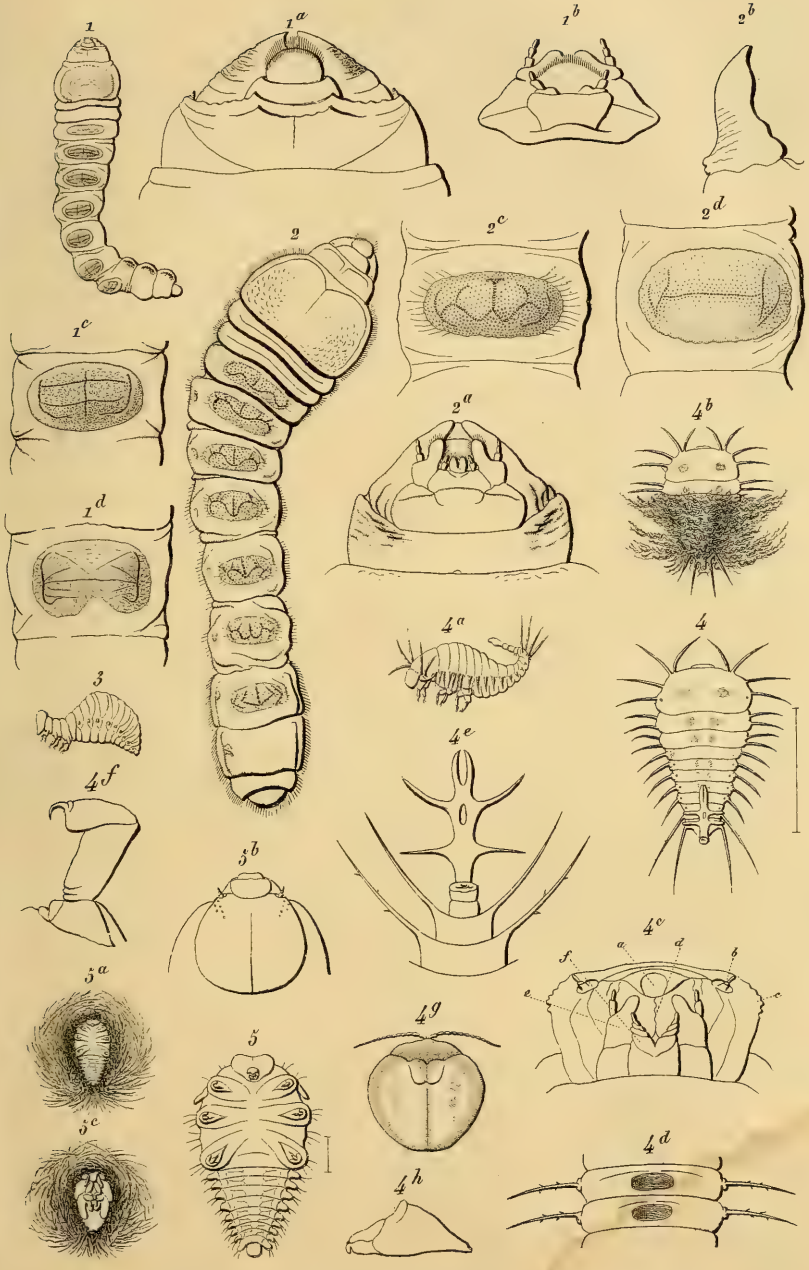


Candèze del. Lith. de H.Dessain.

1, LYCUS CINNABARINUS *Cdz.*–2, COLAPTERON CORRUCATUM *Cdz.*–3, PHOTURIS CONGRUA *Chevr.*–4, PH. TRILINEATA *Say.*–5, PH. PENSYLVANICA *Degeer.*–6, LORDITES GLABRICULA *Murr.*–7, CATORAMA PALMARUM *Guer.*–8, PTEROGENIUS NIETNERI *Cdz.*–9, BOLITOTHERUS CORNUTUS *Fabr.*

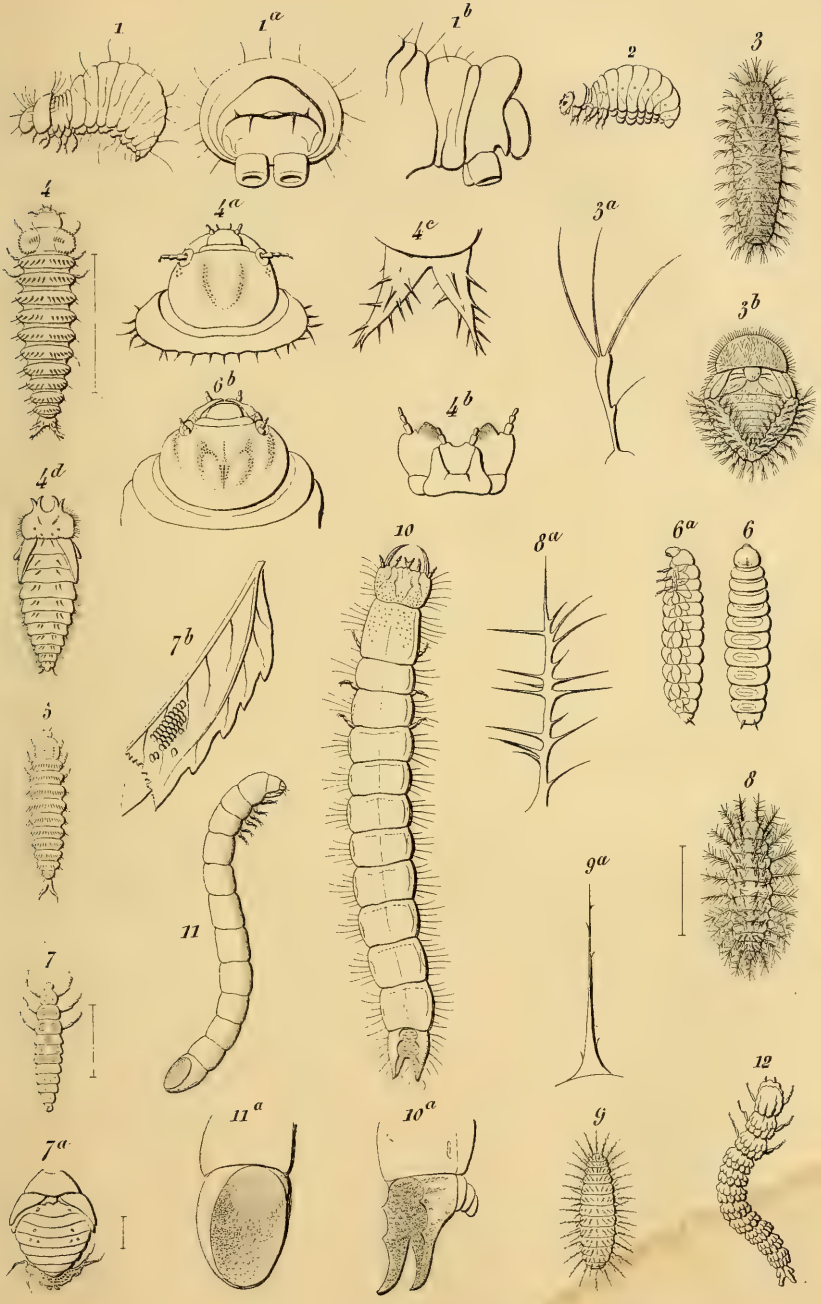


1 RHYNCHOPHORUS ZIMMERMANNI *Schönh.* — 2 ANCHONUS CRISTATUS *Cdz.* —
3 BARIDIUS VESTITUS *Schönh.* — 4 ASTYNOMUS SALLEI *Cdz.*



Candèze del. Lith. de H. Dessain

1 TRICHODERES PINI *Chevr.* 2 ACROCINUS LONGIMANUS *Fabr.*
3 CRIOCERIS VIRIDIS *Chevr.* 4 DOLICHOTOMA LANUGINOSA *Bhm.*
5 PORPHYRASPIS PALMARUM *Bhm.*



Cordière del. Lith. de H. Dessain

1 LEPTINOTARSA CACICA *Stål.* – 2 L. VITTATA *Baly.* – 3 AEGITHUS QUADRINOTATUS *Chevr.*
4 EPISCAPHA QUADRIMACULA *Wied.* 5 ISCHYRUS FLAVITARSIS *Lac.* – 6 DACNE FASCIATA *Fabr.*
7 COCCINELLA IMMACULATA *Fabr.* – 8 EPILACHNA PROTEUS *Guér.*
9 CHILOCORUS CIRCUMDATUS *Muls.* – 10 ALAUS SPECIOSUS *Fabr.*
11 TENEBRION *Sp.* – 12 LYCID *Sp.*

LISTE ALPHABÉTIQUE DES LARVES

DÉCRITES.

	Pages.
Acrocinus longimanus	380
Aegithus quadrinotatus	398
Alaus speciosus	402
Ambliopus cinctipennis	397
Amphicrossus discolor	337
Anchonus cristatus	370
Ancylonycha fusca	347
Astynomus Sallei	382
Baridius vestitus	372
Bolitotherus cornutus	365
— *quadridentatus*	368
Brontes serricollis	341
Campsosternus Templetonii	350
Canthon volvens	345
Catorama palmarum	362
Ceropria subocellata	369
Chilocorus circumdatus	401
Coccinella immaculata	400
Colapteron corrugatum	356
Crioceris viridis	386
Dacne fasciata	393
Dolichotoma lanuginosa	387
Epilachna proteus	400
Episcapha quadrimacula	395
Galerita nigra	327
— *simplex*	329
Ischirus flavitarsis	394
Leptinotarsa cacica	391

	Pages.
Leptochirus scoriaceus	333
— *mandibularis*	334
Lordites glabricula.	340
Lycida sp.	403
Lycus cinnabarinus	353
Osorius intermedius.	331
Passalus interruptus.	344
— *mucronatus*	»
— *Leachii.*	»
— *bicolor.*	»
Photuris congrua.	359
— *trilineata*	361
— *pensylvanica.*	»
Platydema elliptica	370
Platysoma Marseulii.	335
Pœderus tempestivus.	329
Porphyraspis palmarum	390
Pterogenius Nietneri.	363
Rhyncophorus Zimmermannii.	375
Serica nitida	348
Tenebrionida Sp.	403
Tomicus ferrugineus.	378
Trichoderes pini.	378

VIII. — *Notes sur l'Analyse infinitésimale* ,

PAR

J.-N. NOEL,

PROFESSEUR ÉMÉRITE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Dans une *Dissertation sur les vrais principes des calculs transcendants*, Liége octobre 1860, l'auteur M^r. P. prétend prouver l'*imperfection logique de l'analyse infinitésimale.*

« Quelques géomètres, dit-il, saisis d'admiration pour la puissance du calcul de Leibnitz, et avides de se lancer dans la voie nouvelle, adoptèrent *sans restriction* les principes hypothétiques sur lesquels était installée cette analyse. De ce nombre sont... les frères Bernoulli et le Marquis de l'Hospital. »

« Ces savants, plus hardis que Leibnitz, admirent dans le calcul ces prétendues quantités infiniment petites, dont ils essayèrent par divers moyens de prouver l'existence. Tous ces efforts, joints à ceux tentés depuis, prouvent une seule chose, c'est qu'on ne peut établir *rigoureusement* les principes de l'analyse infinitésimale, vu l'*impossibilité logique* des éléments auxiliaires de ce calcul. »

Cette double affirmation et plusieurs autres étaient déjà réfutées en novembre 1859, dans le Mémoire : *Méthode infinitésimale en géométrie.* Mais une réfutation directe devient ici nécessaire, et se trouve brièvement développée dans les Notes ci-dessous.

I.

Dire qu'*une droite peut se prolonger toujours*, ce n'est pas assigner « une *limite* ou un *terme* à ce prolongement » ; c'est dire au contraire que la droite n'est jamais *finie* dans son état le plus général, n'ayant qu'une seule extrémité. Donc elle est

alors *infinie*, c'est-à-dire que sa longueur surpasse toute longueur *imaginée*, si grande que soit cette dernière.

La droite infinie précédente a pour mesure nécessairement un nombre infini d'unités linéaires; et ce nombre infini devient évidemment 2, 3, 4,... n fois plus *grand* ou plus *petit* lorsque l'unité linéaire devient au contraire 2, 3, 4,... n fois plus *petite* ou plus *grande*.

L'existence des nombres *infiniment grands* est d'ailleurs démontrée par la *racine carrée* de 7, par exemple. Car on sait que cette racine carrée, comprise entre 2 et 3, est une fraction irréductible *finie* dont les deux termes n et p ont chacun un nombre illimité de chiffres; ils sont donc *infinis* tous les deux et toujours inconnus ou *indéterminables*.

Et comme d'ailleurs on a $n^2 = 7p^2$, on voit qu'un nombre infini du *second ordre* peut être un multiple donné d'un infini du même ordre. Même conséquence pour deux infinis du *troisième ordre*, d'après la *racine cubique* de 20, par exemple.

II.

Si l'on conçoit la longueur donnée a divisée en un nombre infini n de parties égales, chaque partie a sur n est *infiniment petite*, c'est-à-dire moindre que toute quantité de même nature *donnée* ou simplement *imaginée*, si petite que soit cette dernière. Car le dénominateur infini n de a étant plus grand toujours que le dénominateur fini d, si grand que soit ce dernier, la fraction a sur n sera toujours, au contraire, moindre que la fraction finie a sur d, si petite que soit cette dernière.

On voit que les nombres infiniment petits sont toujours inconnus ou indéterminables, aussi bien que beaucoup de nombres finis, ainsi que les infiniment petits du *second ordre*, du *troisième*, du *quatrième*, etc.

III.

M. P. croit infirmer le point de vue infinitésimal en énonçant comme il suit le principe de *continuité* :

« On entend par loi de continuité celle qui s'observe dans la génération des lieux géométriques *par mouvement*, et d'après laquelle par exemple, les points successifs d'une même ligne se succèdent *sans aucun intervalle*. »

S'il n'y a pas d'intervalle, il n'y a donc point de mouve-

ment : quelle conséquence alors peut-on déduire rationnellement de cette loi ?

Ensuite M. P. énonce la loi de Poisson où il est démontré que : *Le temps et chaque ligne croissent continûment par infiniment petits.* D'où il suit que les infiniment petits ont une existence réelle et ne sont pas uniquement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres : telle est la conclusion de Poisson.

Pour ne pas laisser subsister « *des idées si fausses* » et prouver l'absurdité de la conclusion précédente, M. P. dit : « ... il est évident que les deux points successifs se *touchent* et qu'ainsi leur distance est *nulle.* » Or, cette conséquence est absurde elle-même ; car le point géométrique n'ayant pas d'étendue, deux points *immédiatement* consécutifs ne peuvent se toucher sans se confondre en un seul ; il n'y aurait donc pas eu de mouvement, contrairement à l'hypothèse.

La distance ci-dessus n'est donc pas rigoureusement nulle. Mais, provenant du plus petit mouvement possible, pendant le moindre temps qu'il se puisse, on doit la considérer comme le plus petit possible de tous les infiniment petits, c'est-à-dire de toutes les quantités inassignables, échappant aux sens et à l'imagination par leurs petitesses : c'est un *indivisible.* — Il est donc absurde de dire : « Le mouvement à lieu sans aucun intervalle de temps ni de lieu. »

D'ailleurs, il est évident que le point générateur de la ligne décrit toutes les longueurs infiniment petites *croissantes*, à commencer par la plus petite possible, avant d'avoir décrit la longueur finie proposée.

IV.

Maintenant, comme toutes les longueurs infiniment petites sont invisibles et *insaisissables*, aussi bien que beaucoup de longueurs finies, il sera toujours impossible « d'indiquer le point où, dans la période décroissante, la longueur cesse d'être finie. » Or, cette impossibilité suffit à M. P. pour nier l'existence des infiniment petits. Car, dit-il, « la quantité dans son décroissement *illimité* reste toujours finie, c'est-à-dire *concevable* et *imaginable.* » (Concevable, oui ; mais imaginable, non). Il en conclut donc que : « *Le principe philosophique infinitésimal est évidemment faux*, et que par suite on est en droit de repousser

de l'ensemble mathématique des auxiliaires qui n'ont et ne peuvent avoir d'existence, *de vraies quantités chimériques.* »

L'existence des infinis et des infiniment petits est certaine et démontrée plus haut. Mais, suivant les adversaires de l'analyse infinitésimale, pour qu'une quantité existe et ne soit pas chimérique, il faut qu'on puisse se la figurer, la saisir, l'imaginer, la calculer et en avoir *des idées sensibles.*

D'après cela, non-seulement les infinis et les infiniment petits n'existeraient pas, mais aussi beaucoup de nombres finis *inexprimables en chiffres*, comme la *racine quatrième* de 48 et le produit d'un million de facteurs égaux à 3. Or, cette conséquence absurde n'est pas du tout philosophique.

V.

Un adversaire des infiniment petits prétend que zéro seul est la plus petite quantité possible; oubliant ainsi que zéro ou le néant n'est pas une quantité. — De son côté, M. P. dit : « je nie que jamais on puisse se figurer une quantité qui, sans être *nulle*, n'est supérieure à aucune autre. » On ne peut se la figurer ni l'imaginer, mais on la conçoit et elle existe comme étant un indivisible.

Pour donner une preuve géométrique de la *non-existence* du plus petit possible des infiniment petits, M. P. considère un triangle dont la base soit un indivisible, et mène à celle-ci une parallèle terminée aux deux côtés latéraux. Par deux triangles semblables cette parallèle est moindre que la base proposée ; cette base n'est donc pas le plus petit possible de tous les infiniment petits, contrairement à l'hypothèse.

Ce raisonnement n'infirme pas l'existence, bien établie, du plus petit infiniment petit ci-dessus ; mais il prouve indirectement que *il n'existe aucun triangle dont la base soit un indivisible.* — D'abord, si ce triangle existait, il n'aurait évidemment que deux *médianes* et pas trois ; chose absurde.

Ensuite, considérons le triangle isocèle ABC dont l'angle A du sommet soit infiniment petit, les deux côtés latéraux AB, AC ayant la même longueur numérique donnée a. Sur ces deux côtés et à partir du sommet A concevons deux longueurs égales à l'infiniment petit du premier ordre i : si la base du triangle isocèle résultant était aussi égale à i, ce triangle serait équilatéral et l'angle A de 60° ; cet angle ne serait donc pas in-

finiment petit, contrairement à l'hypothèse. Il faut donc que la base du triangle isocèle résultant soit un infiniment petit du second ordre iv (ce qu'on démontre directement à l'aide de la Trigonométrie). Dans ce cas, les deux triangles isocèles étant semblables, on a

$$i : a = iv : \mathrm{BC} ; \text{ d'où } \mathrm{BC} = av = \frac{a}{\infty}.$$

La base BC étant donc un infiniment petit du premier ordre, n'est pas un indivisible, vu qu'elle a même une infinité de points entre ses deux extrémités.

On voit aussi que quand a est infini du premier ordre, représenté par $b \times \infty$, on a $\mathrm{BC} = b$, le nombre quelconque b étant fini.

VI.

On démontre que deux grandeurs géométriques de même nature, ayant toujours un rapport numérique, *rationnel* ou *irrationnel*, c'est-à-dire exprimable ou inexprimable en chiffres, ont aussi toujours un *commun diviseur*, une *commune mesure*, assignable ou inassignable, c'est-à-dire finie ou infiniment petite. Ces deux grandeurs sont alors dites *commensurables* ou *incommensurables* entre elles.

Réciproquement, si deux grandeurs de même nature ont un commun diviseur fini ou infiniment petit, leur rapport numérique est une fraction finie exprimable ou inexprimable en chiffres et dont les deux termes sont deux nombres finis ou infinis.

Cela posé, *lorsque quatre grandeurs de même nature deux à deux,* A *et* B, C *et* D, *ces deux dernières ordinairement des lignes, sont telles que* C *et* D *étant divisées en* n *et* p *parties égales à leur commune mesure* x, A *et* B *soient aussi divisées en* n *et* p *parties égales ou équivalentes à* v, *on aura toujours*

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} = \mathrm{C} : \mathrm{D}.$$

En effet, par hypothèse on a $\mathrm{C} = nx$ et $\mathrm{D} = px$; d'où $\mathrm{C} : \mathrm{D} = nx : px = n : p$. De même on a $\mathrm{A} = nv$ et $\mathrm{B} = pv$; d'où $\mathrm{A} : \mathrm{B} = nv : pv = n : p$. Donc $\mathrm{A} : \mathrm{B} = \mathrm{C} : \mathrm{D}$.

Ce théorème fondamental constitue la *méthode des parties égales* pour établir chaque proportion, en géométrie et en mécanique, par les déductions les plus claires, les plus simples et les plus

exactes. Car cet emploi des grandeurs infinitésimales, où l'on n'a pas à distinguer les deux cas commensurable et incommensurable, évite les longues et obscures réductions à l'absurde, *non-sens* ou *pétitions de principe* suivant qu'on nomme *incommensurables* deux grandeurs n'ayant point de commune mesure ou n'ayant d'autre commun diviseur qu'un infiniment petit.

VII.

Voici maintenant le *Principe infinitésimal*, base des applications du calcul des infinis pour trouver, en nombres finis, des formules générales :

Toute grandeur doit se négliger ou être regardée comme nulle à l'égard de celle qui la contient une infinité de fois et qu'elle doit augmenter ou diminuer : c'est un *zéro relatif* à cette dernière.

Il est évident, en effet, que le nombre infini de fois n'est ni plus ni moins infini quand on y ajoute ou qu'on en retranche une fois la première grandeur ; cette addition ou cette soustraction est donc inutile et doit se négliger comme si la première grandeur était nulle, laquelle d'ailleurs n'est ici qu'une *auxiliaire*.

Donc 1° tout nombre fini est nul relativement à un nombre infini, et chaque infini d'un certain ordre est nul à l'égard de l'infini de l'ordre supérieur. 2° Tout nombre infiniment petit est nul à l'égard d'un nombre fini, et chaque infiniment petit d'un certain ordre est nul relativement à l'infiniment petit d'un ordre inférieur.

De cette manière on élimine plusieurs termes auxiliaires et l'on simplifie beaucoup l'équation, sans altérer l'égalité des deux membres ; d'où résulte ensuite la formule cherchée en nombres finis.

Souvent l'équation finale est de la forme

$$A + x = B + y \quad \text{ou} \quad A - x = B - y ;$$

A et B étant deux nombres finis *invariables*, x et y deux nombres infiniment petits. Dans chacun de ces cas, comme on cherche des nombres finis A et B, les infiniment petits x et y ne peuvent en faire partie, c'est-à-dire ne peuvent les augmenter ni les diminuer, et l'on doit supprimer x et y. On a donc exactement $A = B$.

C'est d'ailleurs ce qu'on vérifie quand les infiniment petits x et y

sont *variables ;* car alors le *théorème des variables auxiliaires* donne simultanément $x = y$ et $A = B$.

VIII.

La définition *descriptive* généralise la loi de continuité dans les courbes, car il en résulte nécessairement que : *Toute ligne courbe n'est en réalité qu'une ligne brisée d'une infinité de côtés, égaux ou inégaux, mais chacun infiniment petit et invisible, aussi bien que chaque angle extérieur de courbure.*

Donc deux courbes *semblables* ne sont que deux lignes brisées semblables, ayant les angles homologues égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels et infiniment petits. Les angles homologues de courbures sont aussi infiniment petits et égaux chacun à chacun.

Il suit de là que les longueurs de deux courbes semblables sont mesurées par le même nombre des deux unités linéaires *relatives* l'une *au modèle* et l'autre *à la copie* semblable. Cette copie *représente* donc exactement le modèle, non-seulement *en forme*, mais aussi *en longueur*, et en tient absolument lieu pour l'étude et les opérations.

Les conditions de la *similitude* de deux figures inégales donnent à ces figures des *formes* identiques. Le mot *forme* signifie donc plus que le mot *figure*. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que le carré et un trapèze quelconque sont deux *figures* inégales de quatre côtés, n'ayant évidemment pas la même *forme*.

IX.

La circonférence et le cercle sont les *limites* constantes des périmètres et des aires variables de polygones réguliers, ayant de deux en deux fois plus de côtés, soit inscrits soit circonscrits. Or, la définition descriptive fait voir immédiatement que les périmètres et les aires variables ci-dessus *coïncident à l'infini* avec leurs limites la circonférence et le cercle.

Donc *le cercle, ou tout secteur circulaire, est un polygone régulier, ou une portion de polygone régulier, d'une infinité de côtés infiniment petits et invisibles chacun, dont le rayon et l'apothème sont égaux entre eux.*

C'est ce qu'on démontre d'ailleurs par le *théorème des variables auxiliaires*. Par exemple, le polygone régulier circonscrit d'une infinité de côtés doit coïncider avec le cercle et son périmètre

avec la circonférence. S'il en était autrement, les deux erreurs infiniment petites seraient variables auxiliaires dans l'équation résultante, toujours exacte alors même que le nombre infini de côtés deviendrait de deux en deux fois plus grand. Donc, en vertu du théorème des variables, ces deux erreurs sont égales et se *compensent* ou disparaissent de l'équation. Il n'y a donc aucune erreur finale à considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.

Il n'y a donc pas non plus d'erreur finale à admettre que tout arc circulaire infiniment petit coïncide avec sa corde et qu'il s'applique sur la tangente à son milieu. De sorte que *chaque arc infiniment petit est perpendiculaire au rayon mené à l'une de ses extrémités.*

Comme la *méthode des variables* procède par *compensation* d'erreurs, variables elles-mêmes, et supplée en certains cas au principe infinitésimal ; on voit si M. P. est fondé à dire que : « la prétendue compensation d'erreurs de Carnot, donnerait l'erreur pour base au Calcul différentiel, contrairement à la pensée de ce géomètre. »

Observons d'ailleurs que le Principe infinitésimal n'est pas nécessaire pour établir ceux du Calcul différentiel où l'accroissement de la variable est fini ou infiniment petit ; mais ce principe est indispensable dans les applications du calcul intégral pour conduire sûrement et rapidement à la formule cherchée.

X.

Lorsque les termes d'une *Série* deviennent de deux en deux fois plus petits, le premier étant $\frac{1}{2}$, *on peut toujours concevoir la série prolongée à l'infini.* Car jamais aucun des termes ci-dessus ne deviendra nul, vu que la moitié d'un nombre est encore un nombre et non pas zéro. Le nombre de tous ces termes étant donc *infiniment grand*, la progression géométrique proposée se compose d'une série de termes *finis* suivie d'une série de termes *infiniment petits*, ces derniers ayant chacun pour dénominateur un nombre *infini* produit d'une infinité de facteurs 2.

M. P. choisit la progression précédente pour répondre à la question qu'il pose, savoir : « *Les séries illimitées prouvent-elles l'existence des infinis ?* »

La réponse est affirmative, comme on vient de le voir. Mais

celle de M. P. est négative, vu que pour lui un nombre n'existe que quand on peut l'imaginer et l'exprimer en chiffres. Ainsi, comme on l'a remarqué plus haut, il en résulterait la conséquence absurde que non-seulement les nombres infinis et infiniment petits n'existent pas, mais qu'il en est de même de tous les nombres finis qu'on ne saurait calculer ; comme par exemple la racine carrée de 7 et la fraction 1 divisée par le produit d'un million de facteurs 2. De plus, M. P. dit qu'on ne peut avoir la prétention de *sommer* la progression proposée. Mais alors comment sait-il que cette série est équivalente à l'unité ?

Comme un nombre infini n'est pas moins infini quand on en retranche une unité ou plusieurs, on voit que *la somme de tous les termes de certaine série illimitée se calcule en faisant commencer la série au second terme ou à la seconde période.* Car la nouvelle série est identique avec la proposée. Mais pour la progression géométrique, la nouvelle série est le produit de la proposée par un facteur constant et donné.

Dans la progression géométrique générale illimitée la somme de tous les termes, en nombre infini, est en même temps la *fraction génératrice* par division. De sorte que la progression, *supposée continuée à l'infini*, peut toujours être remplacée par cette fraction génératrice équivalente.

La discussion apprend ensuite que les sommes des 2, 3, 4, 5, 6,... premiers termes ne donnent des valeurs de plus en plus approchantes de la véritable somme que quand la progression est *décroissante*. Dans ce cas, la fraction génératrice est donc la *limite* des sommes partielles croissantes.

XI.

Maintenant, cherchons comment peut se produire le mouvement *curviligne continu* de tout point matériel.

D'abord le point se meut en vertu de la *force d'inertie*, acquise par une grande impulsion, et il est en même temps *dévié* de son mouvement *rectiligne* par une force accélératrice. Or, il ne faut évidemment qu'un temps infiniment petit pour que le point matériel reçoive et conserve complètement, par son inertie, l'action continue de cette dernière force. Donc à l'expiration de chacun des temps infiniment petits ci-dessus la force d'inertie du point, force due à celle accélératrice de *déviation*, est augmentée d'une force infiniment petite. De plus, les deux

forces d'inertie du point matériel, et par suite leur résultante, sont constantes pendant chacun des temps infiniment petits successifs.

Ainsi la courbe trajectoire a pour côtés rectilignes infiniment petits et invisibles les diagonales des parallélogrammes, invisibles eux-mêmes, construits chacun sur les deux chemins rectilignes infiniment petits décrits pendant chaque instant x, l'un sur le prolongement de la diagonale immédiatement précédente et l'autre sur la direction de la force de déviation au commencement de x.

De plus, puisque le mouvement est *continu*, chacun des *angles de courbure*, égaux ou inégaux, c'est-à-dire chacun des angles formés par un côté et le prolongement du côté qui précède immédiatement, est lui-même infiniment petit et invisible; car il est l'angle du sommet d'un triangle dont les deux côtés latéraux sont infiniment petits du premier ordre, tandis que la base est un infiniment petit du second ordre, décrit en vertu de la force de déviation, accélératrice constante, et pendant le temps x infiniment petit.

Ici les directions successives de la force accélératrice de déviation sont parallèles entre elles et par conséquent la trajectoire est une courbe plane.

Enfin, la *vitesse* constante avec laquelle le point matériel décrit chaque côté infiniment petit de la courbe est acquise à la première extrémité de ce côté. Or, *la vitesse* v *en ce point a pour mesure le quotient des deux nombres infiniment petits* c *et* t, *exprimant le côté décrit et le temps employé à le décrire.* — En effet, puisque le point matériel décrit, d'un mouvement uniforme, la longueur rectiligne v pendant le temps 1, il est clair que pendant le temps t il décrira la longueur $c = vt$; d'où v est le quotient de c par t.

XII.

Voyons comment, au point de vue de la mécanique, M. P. croit pouvoir réfuter la loi de continuité précédente dans les lignes courbes.

« Examinons, dit-il, l'hypothèse si fausse d'une distance infiniment petite entre deux positions successives du point décrivant une ligne courbe en vertu de forces déterminées et définies. »

« Suivant le principe de Poisson, la trajectoire dégénère en un périmètre polygonal, suivant chaque côté duquel la direction se conserve; mais à l'extrémité de l'un des éléments rectilignes du mouvement, il faudrait qu'une force qui était restée sans action (pourquoi sans action?) pendant le temps nécessaire au parcours de cet élément, agit sur le point à l'instant précis de son passage par un sommet de la trajectoire et qu'immédiatement après cette force vint à cesser d'agir. »

On a vu plus haut que la force de déviation agit continûment et sans interruption sur le point matériel : pourquoi donc M. P. veut-il ici que cette force soit *intermittente?* C'est sans doute pour en conclure (ce qu'il ne fait pas et ce qu'il ne peut faire logiquement) que la distance infiniment petite entre deux positions successives n'existe pas.

Cette conséquence absurde n'a, en effet, aucun rapport avec l'hypothèse d'une force intermittente. D'ailleurs, cette hypothèse, absurde elle-même, vient d'une fausse appréciation du mouvement curviligne du point et dans laquelle le rôle de l'inertie n'est pas indiqué. M. P. a donc raison d'ajouter : « Ce n'est certes pas ainsi qu'il est permis, au point de vue d'une saine logique, de considérer l'action continue et incessante des forces qui produisent le mouvement; par suite, aucune conséquence, tirée d'une pareille hypothèse, ne peut être rationnellement maintenue. »

Il semble qu'après cette critique, M. P. aurait dû nous apprendre comment il conçoit le mouvement curviligne continu du point matériel, sans faire aucun usage, explicite ou implicite, des infiniment petits dont il veut nier l'existence. Car dire : « Le mouvement a lieu sans aucun intervalle de temps ni de lieu, » c'est nier ce mouvement et non pas en concevoir la continuité.

XIII.

Ce qui précède met bien en évidence les erreurs d'appréciation de M. P. et prouve, contrairement à ses affirmations, que l'on peut démontrer *rigoureusement* les principes de l'analyse infinitésimale, ainsi que la *possibilité logique* des éléments auxiliaires de ce calcul.

D'ailleurs, les infinis et les infiniment petits, ayant une existence certaine, se présentent inévitablement en géométrie et en

mécanique pour y faciliter les déductions logiques du calcul, à l'aide du principe infinitésimal. Il est bien établi, en effet, que l'emploi rationnel de ce principe conduit toujours à la vérité par la voie la plus claire, la plus rapide; et, jusqu'à présent, on n'a pas cité un seul exemple où la *Méthode infinitésimale*, logiquement appliquée, ait fait prendre le faux pour le vrai.

De plus, lorsqu'il s'agit de variables continûment croissantes ou décroissantes, aucune méthode de calcul ne peut être « *d'une rigueur absolue* » que par l'emploi des infiniment petits : ils sont inévitables; et il y a nécessairement longueur, obscurité et erreur logique à ne pas en faire mention dans la théorie des rapports et des proportions, ainsi que dans la théorie des lignes courbes et des aires curvilignes.

XIV.

Enfin, M. P. se faisant illusion sur la valeur logique des objections qu'il reproduit contre l'existence des infinis et contre leur emploi dans les calculs transcendants, termine ainsi l'examen critique du concept infinitésimal ;

« De tout ce qui précède, il nous est permis de conclure 1° que si, avec Leibnitz on attribue à l'infini certaine valeur, on ruine l'exactitude des calculs transcendants qui deviennent ainsi des calculs d'approximation. »

« 2° Que si, en dehors de toute conception mathématique, on crée avec les infinis, un nouvel ordre de grandeurs, on tombe dans les conséquences les plus absurdes et dans des paradoxes continuels. »

Ces deux conclusions sont erronées. En effet, 1° La valeur, toujours inconnue, attribuée à l'infini est celle que sa définition lui donne, valeur dont l'existence est démontrée. De plus, les calculs transcendants sont rigoureusement exacts en vertu du principe infinitésimal.

2° On ne crée pas en dehors de toute conception mathématique, mais on reconnaît et l'on prouve l'existence de différents ordres de nombres infinis et de nombres infiniment petits. D'ailleurs, où sont les exemples et les preuves de *ces conséquences les plus absurdes* et de *ces continuels paradoxes ?* Je ne les trouve ni dans l'examen critique ci-dessus, ni dans l'ensemble des objections, si souvent renouvelées, contre l'analyse infini-

tésimale. J'en conclus donc que cette analyse reste toujours indispensable à la science mathématique pour en faciliter l'étude approfondie et la rendre possible.

XV.

Les anciens géomètres, pour étendre aux lignes courbes les propriétés générales des lignes brisées inscrites et circonscrites, ne faisaient aucune mention des grandeurs infinitésimales, mais ils les employaient néanmoins implicitement; ainsi que M. P. lui-même le prouve, à son insu, en faisant usage de la méthode d'*Exhaustion* pour trouver le rapport des surfaces A et A′ de deux cercles dont R et R′ sont les rayons donnés. Voici à peu près le procédé qu'il suit :

Lorsque dans les deux cercles proposés on inscrit une suite de couples de polygones réguliers semblables, ayant de deux en deux fois plus de côtés, les surfaces croissantes des couples successifs approchent indéfiniment et d'aussi près qu'on veut des surfaces A et A′, lesquelles en sont les *limites*. Et puisque le rapport des surfaces de chaque couple de polygones réguliers semblables inscrits est égal au carré du rapport des rayons R et R′, il est à prévoir que ce dernier rapport aura lieu encore lorsque par la pensée on se transportera aux limites A et A′; c'est-à-dire *lorsqu'on regardera les deux cercles comme deux polygones réguliers semblables, ou ayant un même nombre infini de côtés infiniment petits et invisibles chacun.*

Tel est le résultat de l'induction. M. P. ne l'énonce pas, mais il l'admet cependant, car il veut le démontrer par de longues et obscures réductions à l'absurde; tandis que la méthode des variables, beaucoup plus simple et toujours exacte, donne à la fois l'induction et la démonstration directe.

En résumé, la méthode des variables, ici la méthode des limites, étant basée sur le théorème des variables auxiliaires, démontre la méthode infinitésimale; car il en résulte que *la variable coïncide à l'infini avec sa limite constante.*

C'est d'ailleurs ce que les anciens géomètres admettaient implicitement; car leur méthode d'exhaustion les amenait à « considérer la différence entre la courbe et le périmètre brisé, inscrit ou circonscrit, comme convergeant continûment vers zéro, comme s'*épuisant.* » Mais n'ayant pas les véritables notions des lignes

courbes ni des grandeurs infinitésimales, ils ne pouvaient énoncer en principe que : La ligne courbe est une ligne brisée d'une infinité de côtés infiniment petits, chacun invisible, etc.

XVI.

On sait que la théorie des fonctions dérivées de Lagrange n'est générale et rigoureuse que par les infiniment petits qu'il voulait éviter. « D'ailleurs, il est à remarquer, dit M. P., qu'en considérant des accroissements effectifs (ou finis), Lagrange réalise une suite discontinue d'états, variables brusquement de l'un à l'autre, ce qui permettrait même en toute rigueur d'affirmer que la théorie de Lagrange est la négation du principe de continuité. Qu'on ne s'étonne pas dès lors de l'impuissance pratique de cette conception.... »

Donc M. P. admet ainsi qu'une grandeur ne peut varier *continûment* que par infiniment petits. Et quant à l'impuissance pratique ci-dessus, elle vient uniquement de ce que Lagrange ne voulait faire usage d'aucune grandeur infinitésimale. C'est d'ailleurs ce que M. P. prouve lui-même en citant l'appréciation ci-dessous de *Bordas-Dumoulin* :

« Lagrange prétend avoir dégagé le Calcul différentiel de la considération de l'infini, mais il serait plus juste de dire qu'il a détruit cette admirable analyse. On ne peut connaître les propriétés des fonctions dérivées qu'autant que l'on considère l'infini ; c'est seulement ainsi que l'on peut savoir ce que représente la fonction prime dans une courbe, ou dans le mouvement uniformément accéléré. »

On voit que la méthode des dérivés n'est rigoureuse, ni d'une application simple et rapide, que par les infiniment petits et le principe infinitésimal : Or il en est de même évidemment de toutes les méthodes de calcul, anciennes et nouvelles, que M. P. examine.

XVII.

Voyons comment le principe infinitésimal fait passer immédiatement du connu à l'inconnu dans le mesurage des aires et des volumes. Il en résulte d'abord les principes élémentaires que voici :

1° *Une aire plane mixte ou curviligne étant décomposée en tranches par des cordes parallèles infiniment voisines, chaque*

tranche peut être prise pour un parallélogramme de hauteur infiniment petite. Elle n'en diffère évidemment que d'un infiniment petit du second ordre, lequel devient un infiniment petit du premier et conséquemment *nul* à la fin du calcul.

2° *Le volume terminé par une surface mixte ou courbe étant divisé en tranche par des plans parallèles infiniment voisins, chaque tranche coïncide avec le prisme ou le cylindre de même base et de même hauteur infiniment petite.* Car elle n'en diffère que d'une quantité *nulle* à la fin du calcul, en vertu du principe infinitésimal.

3° Enfin, par la même raison, les *secteurs* d'une aire plane curviligne, formés par des rayons infiniment voisins, peuvent être considérés comme des *secteurs circulaires* (ou des *triangles isocèles*) *et chacun a pour mesure le demi-carré de son rayon numérique multiplié par l'arc infiniment petit qui mesure son angle.* Car ici cet arc infiniment petit, de rayon I, coïncide avec son sinus, toujours en vertu du principe infinitésimal.

La méthode des variables auxiliaires démontre aussi complètement les trois principes ci-dessus. Le premier conduit directement à la quadrature de différentes courbes rapportées à des coordonnées, ordinairement rectangulaires. Le troisième, à la quadrature de certaines courbes dont on a les équations en coordonnées polaires. Et quant au second principe, il fait trouver, le plus simplement possible, l'expression numérique du volume de toute pyramide dont la base et la hauteur sont données numériquement.

Le procédé à cet effet doit être remarqué, d'abord comme très-élémentaire et ensuite comme pouvant suppléer avec avantage au calcul intégral pour différents mesurages importants. Je citerai, par exemple, la cubature des *voûtes* dépendantes chacune de segments d'un même genre de courbes du second degré.

Désignant en effet par p l'aire du polygone, *base* de la voûte, par h la hauteur de celle-ci et par v son volume, on trouve aisément $v = \frac{2}{3}ph$, si chaque segment est une demi-ellipse, h étant alors un demi-axe commun sur l'axe des x rectangulaires. Cette voûte, dite *en arc de cloître*, est *surmontée* ou *surbaissée* suivant que h est le demi-grand axe ou la moitié du petit.

La voûte serait *en plein cintre* si, ayant pour base un polygone

régulier p, elle avait pour hauteur h l'apothème de ce polygone. Alors chaque segment est le demi-cercle dont h est le rayon, et l'on aura toujours $v = \frac{2}{3}ph$. Mais *la surface courbe totale S de la voûte est double de la base.*

Cette propriété remarquable se démontre par la méthode infinitésimale ; laquelle fait voir que le volume de la voûte est aussi exprimé par $v = \frac{1}{3}Sh$: donc $S = 2p$.

On peut donc calculer le volume et la surface courbe de la voûte en plein cintre, dont la base est le carré ou l'hexagone régulier ayant 12 mètres de côté, et trouver la dépense pour vernir la surface courbe à raison de 180 centimes par mètre carré.

D'après la théorie des surfaces et des volumes de révolution, on peut aussi calculer l'aire courbe et le volume, du *Dôme surbaissé* engendré par la révolution, autour de la montée, d'une demi-Anse de panier à trois centres ; l'arc moyen et les deux arcs extrêmes égaux étant le sixième chacun de la circonférence à laquelle il appartient. On connaît les valeurs 8 et 20 mètres de la montée m et du rayon r de l'arc moyen.

Liége, juillet 1861.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

L. De Koninck. *Mémoire sur les Genres et les Sous-Genres des Brachiopodes munis d'appendices spiraux et sur leurs espèces découvertes dans les couches carbonifères des îles Britanniques.* 1

Martynowski. *Des combinaisons avec répétition* 53

Noel. *Méthode infinitésimale en Géométrie.* 73

Paque. *Examen des diverses méthodes employées pour l'établissement et le développement des calculs transcendants* 145

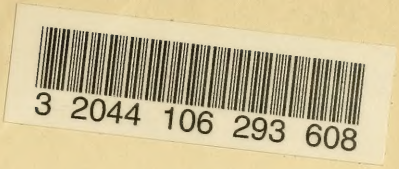
Kupfferschlaeger. *Notice sur l'action du fer et du zinc dans les dissolutions des métaux dont les oxydes sont solubles dans l'ammoniaque* 297

Terssen. *Nouvelle méthode pour déterminer le centre de gravité des corps.* 313

Candèze. *Histoire des métamorphoses de quelques Coléoptères exotiques* 325

Noel. *Notes sur l'Analyse infinitésimale* 411

FIN.



Date Due

JUN 1969